Nom: Genève, 30 mai 2011.
Prénom:

Gestion des risques

- La durée de l'examen est de une heure et trente minutes.
- N'oubliez pas d'indiquer votre nom et prénom sur chaque feuille.
- Toute documentation et calculatrice sont interdites.
- Veuillez justifier les réponses. Une réponse peu claire ou imprécise joue en votre défaveur.
- Veuillez définir vos notations clairement et de façon cohérente avec l'énoncé.

Nom:
Prénom:

Swap first-to-default

On se propose de modéliser la distribution jointe des temps de défaut τ_1 et τ_2 pour deux entreprises. Le temps de défaut de chacune est décrit par sa fonction de survie, $S_i(t) = \mathbb{P}(\tau_i > t)$, $i = 1, 2$.

1. Indiquez comment représenter la fonction de survie jointe à l'aide de la copule de survie $\bar{C}$ (théorème de Sklar pour la fonction de survie).

2. On suppose dès maintenant que τ_i a le taux de hasard $\lambda_i(t)$, $i = 1, 2$, c'est-à-dire que $S_i(t) = \exp\left(-\int_0^t \lambda_i(s)\, ds\right)$. On suppose en plus que la copule de survie $\bar{C}$ possède une densité. Exprimez la densité jointe de (τ_1, τ_2) en termes de $\bar{C}$, $\lambda_1(t)$ et $\lambda_2(t)$.

3. Décrivez les différentes méthodes pour estimer la copule de survie $\bar{C}$. Quelle méthode est préférable lorsqu'on on connaît les fonctions $\lambda_1(t)$ et $\lambda_2(t)$?

4. A partir de cette question, on suppose que les temps de survie suivent la loi exponentielle, i.e. que les taux de hasard sont constants : $\lambda_1(t) = \lambda_1$ et $\lambda_2(t) = \lambda_2$. On suppose que la copule de survie est la copule de Clayton : $\bar{C}(u_1, u_2) = (u_1^{-\theta} + u_2^{-\theta} - 1)^{-1/\theta}$, $\theta > 0$. Soit (U_1, U_2) un vecteur aléatoire distribué selon $\bar{C}$. Calculez la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}(U_1 < u_1 \mid U_2 = u_2)$.

5. En utilisant la question précédente, proposez un algorithme de simulation du vecteur des temps de défaut (τ_1, τ_2).

On s'intéresse à l'évaluation d'un swap *first-to-default*. Ce produit est structuré de manière suivante. L'acheteur de protection veut se protéger contre le défaut de l'une des deux entreprises de référence. Pour cela, il verse périodiquement une prime au vendeur de protection. Les paiements sont dus aux dates prédéfinies $0 < t_1 < \cdots < t_N$ s'il n'y avait pas eu de défaut avant la date t_i. (Il n'y a pas de paiement en date 0.) A la date t_i, le montant de la prime est égal à $x(t_i - t_{i-1})$, où x est le spread du swap. Si le défaut de l'une des deux entreprises arrive avant l'echéance t_N du contrat, le vendeur de protection effectue – à cette date du défaut – le paiement contingent à l'acheteur de protection. On suppose que le montant l du paiement contingent est connu à la date 0.

6. On se place dans le monde d'un trader sur un marché liquide des produits dérivés de crédit. Les paramètres λ_1, λ_2, θ du modèle sous la probabilité $\mathcal{Q}$ neutre au risque ont été calibrés aux prix des autres produits. Le taux sans risque r est supposé constant. Décrivez de manière explicite une méthode numérique par simulations pour obtenir le spread équitable x^* du swap first-to-default.

7. Dans le cas, où les défauts sont indépendants (i.e. $\theta = 0$), trouvez une formule analytique pour le spread équitable x^* du swap first-to-default.