Processus de diffusion

Olivier Scaillet

University of Geneva and Swiss Finance Institute

Outline

Introduction

Dans les pages précédentes on a considéré des processus qui étaient de nature discrète dans le temps ou l'espace.

On va examiner ici des processus indexés selon un temps continu et prenant des valeurs réelles.

L'exemple de base de ce type de processus est le mouvement brownien.

Mouvement brownien

Un *mouvement brownien* $B = \{B_t; t \geq 0\}$ partant de $B_0 = b$ est un processus tel que

1. B a des incréments indépendants
2. $B_{t+1} - B_t$ est distribué suivant $N(0, \sigma^2 h)$
3. les trajectoires de B sont continues

Le processus B est appelé *mouvement brownien standard* si $\sigma^2 = 1$ et $B_0 = 0$. Il est souvent noté W en référence à Wiener et est également appelé *processus de Wiener.*

Distribution des incréments

Les accroissements d'un mouvement brownien seront stationnaires car la distribution de $B_{t+h} - B_t$ ne dépend que de h.

Conditionnellement à $B_s = x$ on aura que B_t sera distribué suivant une loi normale $N(x, t-s)$, c.à.d. que $F(t, y, s, x) = P[B_t \leq y \mid B_s = x]$ admet comme fonction de densité

$$f(t, y, s, x) = \frac{\partial F(t,y,s,x)}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \exp(-\frac{1}{2}\frac{(y-x)^2}{t-s}).$$

Equations forward et backward

On peut vérifier que la *densité de transition f* satisfait les équations différentielles suivantes :

- équation de diffusion forward: $\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$
- équation de diffusion backward: $\frac{\partial f}{\partial s} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$

L'équation forward s'obtient en fixant (conditionnant) $B_s = x$ tandis que l'équation backward s'obtient en fixant (conditionnant) $B_t = y$.

Temps de premier passage

Le temps de premier passage $T(x)$ au point x du mouvement brownien standard est défini par $T(x) = \inf\{t : B_t = x\}$ (la nécessité de la continuité des trajectoires est évidente pour que cette définition ait un sens).

La variable aléatoire $T(x)$ admet comme fonction de densité $f(t) = \frac{|x|}{\sqrt{2\pi t^3}} \exp\left(-\frac{x^2}{2t}\right)$, $t \geq 0$.

Distribution du maximum

On peut également caractériser la densité de $m_t = \max\{W_s; 0 \leq s \leq t\}$.

En effet, on remarque que $T(m) \leq t \iff m_t \geq m$. On peut prouver que la variable aléatoire m_t admet comme fonction de densité $f(m) = \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \exp\left(-\frac{m^2}{2t}\right)$, $m \geq 0$.

Le mouvement brownien bénéficie du principe de translation et de réflexion de ses trajectoires.

Exemple: application de Bachelier

Une des premières applications du mouvement brownien fut proposée par Bachelier (1900). Elle concernait l'utilisation du mouvement brownien pour la description de l'évolution des cours sur la Bourse de Paris.

Bachelier a supposé que les incréments infinitésimaux de prix dX_t d'un actif boursier sont proportionnels aux incréments dB_t d'un mouvement brownien standard, soit $dX_t = \sigma dB_t$.

Si on part d'un actif de valeur initiale $X_0 = x$, sa valeur en t sera $X_t = x + \sigma B_t$.

Exemple: application de Bachelier (cont'd)

L'inconvénient de cette modélisation est que le prix a une probabilité non nulle de devenir négatif.

Pour remédier à cela on modélise plutôt les incréments relatifs par rapport au prix (rentabilités) comme proportionnels aux incréments du mouvement brownien standard,soit $\frac{dX_t}{X_t} = \sigma dB_t$ ou encore $dX_t = \sigma X_t dB_t$.

La dernière expression ressemble à une équation différentielle. On est cependant en présence de deux difficultés.

1. les variables de l'équation sont aléatoires
2. les trajectoires de B_t ne sont nulle part différentiables bien que continues.

Exemple: application de Bachelier (cont'd)

La solution mathématique à ce problème fut donné par Itô dans les années 40 à l'aide de l'introduction d'une nouvelle espèce d'intégrale : l'*intégrale stochastique*.

En particulier, elle permet d'écrire $X_t = x + \sigma \int_0^t X_s dB_s$ où on intègre par rapport à l'élément aléatoire B.

Intégrale stochastique d'Itô

L'intégrale stochastique se construit de façon semblable à l'*intégrale classique de Riemann*.

L'intégrale est d'abord définie sur une classe de processus constants par morceaux et ensuite étendue à une classe plus large par approximation.

Il y a cependant deux grandes différences entre l'intégrale de Riemann et l'intégrale d'Itô. La première est le le type de convergence: l'intégrale de Riemann converge dans $\mathbb{R}$ tandis que l'intégrale d'Itô est approchée par des séquences de variables aléatoires qui convergent dans L^2, l'espace des variables aléatoires de carrés intégrables (variance finie)

Intégrale stochastique d'Itô (cont'd)

La second différence est la suivante. Les sommes de Riemann approchant l'intégrale d'une fonction $f : [0, T] \to \mathbb{R}$ sont de la forme : $\sum_{j=0}^{n-1} f(s_j)(t_{j+1} - t_j)$ avec $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = T$ et s_j un point *arbitraire* dans $[t_j, t_{j+1}]$ pour tout j.

La valeur de l'intégrale de Riemann *ne dépend pas* du choix des points $s_j \in [t_j, t_{j+1}]$.

Dans le cas stochastique, les sommes approximantes prennent la forme : $I(f_n) = \sum_{j=0}^{n-1} f(s_j)(W_{t_{j+1}} - W_{t_j})$.

La limite de telles approximations *dépend* du choix des points intermédiaires $s_j \in [t_j, t_{j+1}]$. De façon à lever l'ambiguïté, on prend $s_j = t_j$ pour tout j. Comme on prend la borne inférieure de l'intervalle, les approximations à une certaine date ne dépendent que de l'information connue à cette date et pas des événements futurs.

Intégrale stochastique d'Itô (cont'd)

L'intégrale d'Itô se note $\int_0^\infty f(s)dW_s$ et est définie de telle façon que $\lim_{n\to\infty} E[| \int_0^\infty f(s)dW_s - I(f_n) |] = 0$.

L'intégrale stochastique bénéficie des propriétés suivantes:

1. linéarité:
   $\int_0^t (\alpha f(u) + \beta g(u))dW_u = \alpha \int_0^t f(u)dW_u + \beta \int_0^t g(u)dW_u$
2. isométrie: $E\left[| \int_0^t f(u)dW_u |^2\right] = E\left[\int_0^t | f(u) |^2 du\right]$
3. propriété de martingale: $E\left[\int_0^t f(u)dW_u | F_s\right] = \int_0^s f(u)dW_u$

L'intégrale stochastique sert de base à la définition des processus de diffusion.

Processus de diffusion

L'intégrale stochastique permet de donner un sens à l'équation intégrale : $X_t = X_0 + \int_0^t \mu(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dW_s$ dont une solution est appelée un *processus de diffusion*.

On écrit souvent l'équation ci-dessus sous sa forme différentielle plus compacte: $dX_t = \mu(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t$ appelée *équation différentielle stochastique*.

- La partie $\mu(t, X_t)$ est appelée *drift* ou *terme de tendance*
- La partie $\sigma(t, X_t)$ est appelée *volatilité* ou *terme de diffusion* et correspond à l'écart-type instantané.

Exemples d'applications en finance

- Le mouvement brownien géométrique: il est utilisé dans le modèle de Black- Scholes (1975) d'évaluation d'option pour modéliser l'évolution du prix de l'action :$dS_t = mS_t dt + \sigma S_t dW_t$
- Le processus d'Ornstein-Uhlenbeck: Il est utilisé dans le modèle de Vasicek (1979) de structure par terme des taux d'intérêt pour modéliser l'évolution du taux court instantané r_t : $dr_t = b(a - r_t)dt + sdW_t$
- Le processus racine carrée: il est utilisé dans le modèle de Cox-Ingersoll-Ross (1985) de structure par terme des taux d'intérêt pour modéliser l'évolution du taux court instantané r_t : $dr_t = b(a - r_t)dt + s\sqrt{r_t}dW_t$

Discrétisation d'Euler

La *discrétisation d'Euler*

$X_{t+h} - X_t = \mu(t, X_t)h + \sigma(t, X_t)\sqrt{h}\epsilon_{t+h}, \ \epsilon_{t+h} \sim N(0, 1)$

correspond à la discrétisation de

$dX_t = \mu(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t$ sur un pas de temps h.

Elle peut être utilisée pour simuler des trajectoires approchées du processus en prenant h suffisamment petit.

Lemme d'Ito

Soit X_t un processus de diffusion tel que $X_t = X_0 + \int_0^t \mu(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dW_s$ ou de manière équivalent $dX_t = \mu(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t$.

On cherche à caractériser l'évolution de $Y_t = f(t, X_t)$ via son équation différentielle stochastique. En calcul classique on appliquerait la règle de calcul usuelle (différentielle totale ou chain rule): $dY_t = \frac{\partial f(t,X_t)}{\partial t}dt + \frac{\partial f(t,X_t)}{\partial X}dX_t$.

En calcul stochastique, on a un terme supplémentaire $\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(t,X_t)}{\partial X^2}\sigma^2(t, X_t)dt$ par rapport à la règle de calcul usuelle.

Lemme d'Ito (cont'd)

Le *lemme d'Ito* donne la relation suivante pour $Y_t = f(t, X_t)$:

$$dY_t = \frac{\partial f(t,X_t)}{\partial t}dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(t,X_t)}{\partial X^2}\sigma^2(t,X_t)dt + \frac{\partial f(t,X_t)}{\partial X}dX_t$$

ou encore après remplacement de dX_t par son expression:

$$dY_t = \left[\frac{\partial f(t,X_t)}{\partial t} + \frac{\partial f(t,X_t)}{\partial X}\mu(t,X_t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(t,X_t)}{\partial X^2}\sigma^2(t,X_t)\right]dt + \frac{\partial f(t,X_t)}{\partial X}\sigma(t,X_t)dW_t.$$

Le terme supplémentaire est un terme d'ordre deux qui n'est pas négligeable par rapport aux termes d'ordre un et provient des oscillations rapides de la trajectoire du processus.

Lemme d'Ito (cont'd)

On peut retenir la formule d'Itô en faisant un développement de Taylor à l'ordre deux de $f(t, X_t)$ et

- en remplaçant dX_t par son expression
- en appliquant la table de multiplication d'Itô $(dt)^2 = 0$, $dtdW_t = 0$, $(dW_t)^2 = dt$.

Cela donne en utilisant des notations compactes:

$$
\begin{aligned}
Y &= df \\
&= f_t' dt + f_X' dX + \frac{1}{2}\left(f_{tt}''(dt)^2 + 2f_{Xt}'' dXdt + f_{XX}''(dX)^2\right) \\
&= f_t' dt + f_X'(\mu dt + \sigma dW) + \frac{1}{2}\left(f_{XX}''\sigma^2 dt\right) \\
&= \left(f_t' + f_X'\mu + \frac{1}{2} f_{XX}''\sigma^2\right) dt + \sigma f_X' dW
\end{aligned}
$$

Modèle de Black-Scholes

La formule de Black-Scholes est une formule d'évaluation d'option européenne.

Le modèle de Black-Scholes concerne une économie constituée de deux actifs

- un *actif sans risque*, carnet de dépôt ou obligation zéro-coupon
- un *actif risqué*, action

La valeur de l'actif sans risque M_t croît à un taux d'intérêt constant r actualisé de manière continue avec la normalisation $M_0 = 1$, soit $dM_t = rM_t dt$ avec solution $M_t = e^{rt}$.

La valeur de l'actif risqué S_t est décrite par un processus de diffusion du type mouvement brownien géométrique, soit $dS_t = mS_t dt + sS_t dW_t$ avec solution $S_t = S_0 \exp\left((m - \frac{1}{2}s^2)t + sW_t\right)$.

Portefeuille

Soit $F = \{F_t; t \geq 0\}$ la filtration constituée à l'aide de l'information générée par l'observation des prix successifs $F_t = \{S_u; 0 \leq u \leq t\}$.

Un *portefeuille* est une paire $\alpha = \{\alpha_t; t \geq 0\}$ et $\beta = \{\beta_t; t \geq 0\}$ de processus aléatoires adaptés à la filtration F. On interprète la paire (α, β) comme un portefeuille dépendant du temps comprenant α_t unités de l'action et β_t unités du zéro-coupon.

La valeur à l'instant t du portefeuille (α, β) est donnée par la *fonction valeur* $V_t = \alpha_t S_t + \beta_t M_t$.

Evaluation par réplication

Le portefeuille est dit *autofinançant* si $dV_t = \alpha_t dS_t + \beta_t dM_t$.

Cela signifie que les changements de valeur du portefeuille ne sont dus qu'à des variations de prix: il n'y a pas d'ajouts ou de retraits de fonds.

Le portefeuille autofinançant (α, β) *dupliquera* la fonction de paiement du call européen si sa valeur terminale est égale à la valeur terminale du call, soit $V_T = (S_T - K)_+$.

On aura alors par *absence d'opportunité d'arbitrage (AOA)* que la valeur du portefeuille dupliquant et le prix du call devront être identiques.

Evaluation par réplication (cont'd)

Regardons à présent la fonction valeur V_t du portefeuille comme fonction du temps et du prix de l'action
$V_t = V(t, S_t) = \alpha(t, S_t)S_t + \beta(t, S_t)e^{rt}$.

Une application du lemme d'Itô donne immédiatement
$dV_t = \frac{\partial V(t,S_t)}{\partial S} dS_t + \left[\frac{\partial V(t,S_t)}{\partial t} + \frac{1}{2}s^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V(t,S_t)}{\partial S^2}\right] dt.$

D'autre part, la condition d'autofinancement équivaut à
$dV_t = \alpha(t, S_t)dS_t + \beta(t, S_t)re^{rt}dt.$

Evaluation par réplication (cont'd)

En identifiant alors les termes en dS_t et les termes en dt on voit que pour que le portefeuille soit autofinançant il faut que

$$\frac{\partial V(t,S_t)}{\partial S} = \alpha(t,S_t)$$

$$\left[\frac{\partial V(t,S_t)}{\partial t} + \frac{1}{2}s^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V(t,S_t)}{\partial S^2}\right] = \beta(t,S_t) r e^{rt}.$$

En multipliant la première équation par rS_t et en ajoutant à la deuxième équation, on obtient

$$\left[\frac{\partial V(t,S_t)}{\partial t} + \frac{1}{2}s^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V(t,S_t)}{\partial S^2}\right] + \frac{\partial V(t,S_t)}{\partial S} r S_t.$$

$$= \alpha(t,S_t) r S_t + \beta(t,S_t) r e^{rt}$$

ce qui donne en utilisant $\alpha(t,S_t) r S_t + \beta(t,S_t) r e^{rt} = rV(t,S_t)$ l'*équation d'évaluation*

$$\frac{\partial V(t,S_t)}{\partial t} + \frac{1}{2}s^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V(t,S_t)}{\partial S^2} + \frac{\partial V(t,S_t)}{\partial S} r S_t - rV(t,S_t) = 0.$$

Formule de Black-Scholes

Il suffit alors de résoudre cette *équation différentielle parabolique* en utilisant la condition terminale pour le paiement qui est pour le call européen $V(T, S_T) = (S_T - K)_+$.

Cette résolution donne la *formule de Black-Scholes* pour le prix d'un call européen

$V(t, S_t) = S_t \Phi\left(d_1(T - t, S_t)\right) - Ke^{-r(T-t)} \Phi\left(d_2(T - t, S_t)\right)$, avec

$$d_1(T - t, S_t) = \frac{\ln(S_t/K) + \left(r + \frac{1}{2}s^2\right)(T - t)}{s\sqrt{T - t}}$$

$$d_2(T - t, S_t) = d_1(T - t, S_t) - s\sqrt{T - t}$$

et $\Phi(x)$ la valeur de la fonction de répartition d'une loi normale standard au point x.

Il n'est cependant pas toujours aisé de trouver une telle solution explicite.

Estimation de la volatilité

La formule dépend de la volatilité s du rendement de l'action et s'estime soit

- à partir de données de rendements historiques (volatilité historique)
- soit à partir de données de prix d'options et de l'inversion de la formule de Black-Scholes (volatilité implicite).

Assurance vie indexée

Les idées développées dans le modèle de Black-Scholes peuvent être utilisées dans des modèles d'assurance-vie.

En assurance vie classique un intérêt est payé selon un taux fixe dit technique.

En réalité cependant les compagnies d'assurance investissent une partie de leurs réserves sur les marchés financiers.

La rentabilité espérée est donc plus importante que sur un investissement en obligations non risquées mais il y aura un risque financier supplémentaire.

L'idée de l'assurance-vie indexée, *equity linked life insurance*, est de transférer une partie de ce risque au détenteur de la police.

Assurance vie indexée (cont'd)

On servira un taux d'intérêt plus élevé que dans un contrat classique, mais ce taux sera aléatoire.

Supposons que la fonction de paiement du contrat d'assurance-vie soit liée à un indice de référence soit un portefeuille d'actifs financiers, le prix d'un actif ou d'un indice boursier.

On considère ici le cas d'un paiement correspondant au maximum de la valeur de l'indice et d'un montant b garanti. Cela réduira le risque pour le détenteur.

Assurance vie indexée (cont'd)

On suppose que la valeur de l'indice X_t suit un mouvement brownien géométrique $dX_t = mX_t dt + sX_t dW_t$.

Le paiement se fera à la date T qui sera ici une date aléatoire liée à la mort du porteur de la police ou de tout autre événement décrit dans le contrat (perte d'emploi, divorce, mariage, ...).

Le paiement à la date T sera $\max(X_T, b) = X_T \vee b$.

Types d'assurances vies

On distingue deux types de contrat fondés sur un horizon t_0 fixe :

- Assurance à terme (term insurance), où la valeur $X_T \vee b$ est payée lors du décès survenant à la date $T \in [0, t_0]$.
- Assurance richesse pure (pure endowment insurance), où la valeur $X_{t_0} \vee b$ est payée si le porteur est toujours en vie au temps t_0.

De manière générale on combine les deux types d'assurance-vie en mettant éventuellement des montants b différents.

Modèle

Supposons que $T = T_a$ corresponde à la durée de vie restante d'un porteur âgé de a années aujourd'hui et que celle-ci soit indépendante du prix X de l'indice.

On aura que $1 - F_{T_a}(t) = P[T_a > t]$ représentera la probabilité que le porteur d'assurance survive dans les t prochaines années.

De même $F_{T_a}(t) = P[T_a < t]$ représente la probabilité qu'il décède dans les t prochaines années.

La densité de T_a au point u est notée $f_{T_a}(u)$.

Modèle (cont'd)

La distribution de T_a dépend de l'âge, du sexe, du pays, de la santé, ...

On aura donc deux sources de risque dans une assurance vie indexée :

- Le risque financier dû à l'évolution de l'indice
- le risque de mortalité dû au décès (survie) du porteur.

Ces deux risques proviennent des deux sources d'aléas X et T_a influençant la fonction de paiement.

Modèle (cont'd)

Remarquons que la fonction de paiement $X_{T_a} \vee b$ peut être réécrite $b + \max(X_{T_a} - b, 0)$, ce qui est équivalent au paiement d'un montant fixe b et du paiement $\max(X_{T_a} - b, 0)$.

Pour un T_a fixé on peut utiliser la formule de Black-Scholes pour valoriser le paiement $\max(X_{T_a} - b, 0)$ puisqu'il correspond au paiement d'un call européen de maturité T_a sur l'indice X et de prix d'exercice b.

Modèle (cont'd)

Pour une maturité $T_a = u$, le prix à la date 0 (aujourd'hui) sera

$$C(u, X_0) = X_0 \Phi\left(d_1(u, X_0)\right) - be^{-ru} \Phi\left(d_2(u, X_0)\right)$$

$$d_1(u, X_0) = \frac{\ln(X/b) + \left(r + \frac{1}{2}s^2\right) u}{s\sqrt{u}}$$

$$d_2(u, X_0) = d_1(u, X_0) - s\sqrt{u}$$

et $\Phi(x)$ la valeur de la fonction de répartition d'une loi normale standard au point x.

Pour calculer la prime de l'assurance il suffit ensuite de pondérer par les probabilités associées aux différents paiements possibles.

Prime de l'assurance richesse pure

Pour l'assurance richesse pure (pure endowment insurance) on a que la valeur $X_{t_0} \vee b$ est payée si le porteur est toujours en vie au temps t_0.

La probabilité d'être toujours en vie en t_0 est donnée par $P[T_a > t_0] = 1 - F_{T_a}(t_0)$.

La prime aujourd'hui Π_0^e sera donc simplement le prix aujourd'hui de l'unique paiement intervenant en t_0 à savoir la somme du montant fixe b actualisé et du prix du call, soit $be^{-rt_0} + C(t_0, X_0)$, multiplié par la probabilité d'être toujours en vie $1 - F_{T_a}(t_0)$, ce qui donne $\Pi_0^e = (be^{-rt_0} + C(t_0, X_0))\,(1 - F_{T_a}(t_0))$.

Prime de l'assurance à terme

Pour l'assurance à terme (term insurance), le paiement peut se faire à tout moment entre $[0, t_0]$ s'il y a décès et pas qu'uniquement en t_0.

Si on est sûr que le décès a lieu en $T_a = u$, la valeur aujourd'hui du paiement est $be^{-ru} + C(u, X_0)$.

Pour obtenir la prime aujourd'hui Π_0^t, il suffit alors de pondérer par la densité $f_{T_a}(u)$ de T_a au point u et de sommer sur toutes les dates possibles u entre 0 et t_0, ce qui donne
$\Pi_0^e = \int_0^{t_0} \left(be^{-ru} + C(u, X_0)\right) f_{T_a}(u) du$.

Modèle intertemporel de Merton

Le modèle intertemporel de Merton consiste en un problème de *choix optimal de consommation et de portefeuille en temps continu*.

On cherche à déterminer les niveaux de consommation et les sommes à investir dans les actifs financiers de façon à *maximiser son espérance d'utilité* en partant d'un niveau de richesse initiale w.

On suppose que l'on est en présence de N actifs financiers, dont les prix sont décrits par
$dS_t^i = m_i S_t^i dt + s_i S_t^i \sum_{j=1}^{d} dW_t^j$.

L'évolution de chaque actif financier dépend de d sources d'aléas W_t^j, $j = 1, \ldots, d$.

Modèle intertemporel de Merton (cont'd)

On définit le prix de l'actif sans risque par $dM_t = rM_t dt$ avec $M_0 = 1$.

On a donc la possibilité d'investir dans N actif risqués et un actif sans risque, ce qui donne le processus multidimensionnel des prix $X = (M, S^1, \ldots, S^N)$.

Soit c_t le niveau de consommation à l'instant t et Z le niveau de richesse terminale. On va chercher à maximiser
$U(c, Z) = E\left[\int_0^t u(c_t, t)dt + F(Z)\right]$,
où u et F représentent respectivement les utilités liées à la consommation et à la richesse terminale.

Modèle intertemporel de Merton (cont'd)

Les actifs financiers vont servir de véhicule de transfert de richesse d'une date à l'autre et vont permettre de financer les consommations futures.

Une stratégie d'investissement est représentée par un processus $\theta = (\theta^0, \theta^1, \ldots, \theta^N)$. Cette stratégie est dite *finançant* le plan de consommation $c = \{c_t; t \in [0, T]\}$ et la richesse terminale Z si elle satisfait
$\sum_{i=1}^N \theta_t^i S_t^i = w + \int_0^t \sum_{i=1}^N \theta_s^i dS_s^i - \int_0^t c_s ds \geq 0$ pour $t \in [0, T]$ et
$\sum_{i=1}^N \theta_T^i S_T^i = Z$.

Pour un niveau de richesse initiale w, on cherchera ensuite à maximiser sur c, z et θ.

Modèle intertemporel de Merton (cont'd)

On représente souvent le problème en terme de fraction (pourcentage) investie φ à la place de quantité investie θ, soit φ avec $\varphi_t^n = \frac{\theta_t^n S_t^n}{\sum_{i=1}^N \theta_t^i S_t^i}$, $n = 1, \ldots N$.

On peut obtenir des solutions explicites pour certaines classes d'utilité particulières (par exemple $u(w) = w^\alpha/\alpha$) à l'aide des techniques de résolution de problèmes de contrôle optimal stochastique.

Ce type de modélisation est utilisée dans des problèmes de fonds de pension où l'on investit les primes reçues dans des actifs financiers afin de financer les retraites futures.