Martingales

Olivier Scaillet

University of Geneva and Swiss Finance Institute

Outline

Définition

Une séquence $Y = \{Y_t;\ t \geq 0\}$ est une *martingale* (discrète) par rapport à la séquence $X = \{X_t;\ t \geq 0\}$ si pour tout $t \geq 0$

1. $E \mid Y_t \mid < \infty$
2. $E[Y_{t+1}|X_0, X_1, \ldots, X_t] = Y_t$

Exemples: simple marche aléatoie

Simple marche aléatoire: particule saute de $+1$ à droite avec probabilité p, de -1 à gauche avec probabilité $1-p$

1. La position de la particule après t sauts satisfait $E \mid S_t \mid \leq t$
2. $E[S_{t+1}|X_1, X_2, \ldots, X_t] = E[X_1 + \cdots + X_t|X_1, X_2, \ldots, X_t] + E[X_{t+1}|X_1, X_2, \ldots, X_t] = S_t + (p-q)$

On en déduit que $Y_t = S_t - t(p-q)$ définit une martingale par rapport à X. En effet, $E[Y_{t+1}|X_1, X_2, \ldots, X_t] = E[S_{t+1} - (t+1)(p-q)|X_1, X_2, \ldots, X_t] = S_t + (p-q) - (t+1)(p-q) = Y_t$

Exemples: stratégie de jeu de roulette

Supposons un joueur ayant une grande somme d'argent. Il choisit la stratégie suivante.

Il parie CHF 1 sur les rouges. S'il perd il remise CHF 2 sur les rouges, et en doublant ainsi de suite à chaque coup.

Dès lors s'il perd pendant les t premiers jets, il pariera 2^t sur les rouges pour le $t+1$ème jet. On voit donc que ce joueur est sûr de gagner un jour ou l'autre.

En effet s'il gagne au $T+1$-ème jet, il empoche
$2^T - (1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{T-1})$.

Exemples: stratégie de jeu de roulette (cont'd)

Le gain cumulé Y_t (somme de tous les montants joués) lié à cette stratégie est une martingale. En effet

- si le joueur s'arrête en $t+1$ (rouges sortent pour la première fois), on a $Y_{t+1} = Y_t$
- si le joueur doit continuer on a

$$Y_{t+1} = \begin{cases} Y_t - 2^t & \textit{avec probabilité } \frac{1}{2} \\ Y_t + 2^t & \textit{avec probabilité } \frac{1}{2} \end{cases}$$ ce qui donne
$$E[Y_{t+1}|Y_1, Y_2, \ldots, Y_t] = Y_t.$$

La stratégie donne donc une martingale pour le gain par rapport à lui même.

Exemples: stratégie de jeu de roulette (cont'd)

Remarquons que même si le joueur est certain de gagner un jour ou l'autre sa perte moyenne est infinie. En effet soit T la variable aléatoire correspondant au fait que le joueur gagne au Tème jet.

Cette variable aléatoire a une masse de probabilité $P[T = t] = \left(\frac{1}{2}\right)^t$ et on a bien que $\lim_{t \to \infty} P[T = t] = 0$ (sur de gagner un jour à la longue).

Cependant avant cette date où il gagne, il aura perdu une somme L de valeur moyenne :
$E[L] = \sum_{t=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^t (1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{t-2}) = \infty.$

Ainsi ce joueur doit perdre en moyenne une somme infinie, on ne peut donc espérer que ce type de stratégie soit gagnante que lorsque l'on dispose d'un capital initial énorme.

Exemples: stratégie de jeu de roulette (cont'd)

Les casinos interdisent la mise en place de ce type de stratégie en mettant des plafonds aux sommes jouées et les croupiers reçoivent l'instruction de refuser les mises des personnes les mettant en place.

Exemples: martingale de Moivre

Grâce à la caractérisation d'une martingale on peut répondre à la question suivante concernant la ruine d'un joueur.

On considère une simple marche aléatoire sur $\{0, 1, \ldots, N\}$ qui s'arrête lorsqu'elle atteint les barrières absorbantes placées en 0 et N.

La question concerne la probabilité d'être arrêté en zéro.

Exemples: martingale de Moivre (cont'd)

Soit $X_1, X_2, \ldots$ les sauts de la marche aléatoire avec $p = P[X_t = 1]$ et $q = 1 - p = P[X_t = -1]$.

On note S_t la position après t sauts (état de la richesse après t sauts), avec $S_0 = k$. On définit $Y_t = \left(\frac{q}{p}\right)^{S_t}$ et on a

$$\begin{aligned} E[Y_{t+1}|X_1, X_2, \ldots, X_t] &= E[\left(\frac{q}{p}\right)^{S_t + X_{t+1}} |X_1, X_2, \ldots, X_t] \\ &= \left(\frac{q}{p}\right)^{S_t} E[\left(\frac{q}{p}\right)^{X_{t+1}} |X_1, X_2, \ldots, X_t] \\ &= \left(\frac{q}{p}\right)^{S_t} \left[p\left(\frac{q}{p}\right)^1 + q\left(\frac{q}{p}\right)^{-1}\right] = \left(\frac{q}{p}\right)^{S_t} \\ &= Y_t \end{aligned}$$

$Y_t = \left(\frac{q}{p}\right)^{S_t}$ est donc bien une martingale.

Exemples: martingale de Moivre (cont'd)

En itérant et utilisant la loi des projections itérées, on a que

$$\begin{aligned} E[Y_t] &= E[E[Y_t|X_1, X_2, \dots, X_{t-1}]] \\ &= E[Y_{t-1}] = E[E[Y_{t-1}|X_1, X_2, \dots, X_{t-2}]] \\ &= E[Y_{t-2}] = \cdots = E[Y_0] = Y_0 = \left(\frac{q}{p}\right)^{S_0} \\ &= \left(\frac{q}{p}\right)^{k} \end{aligned}$$

La relation $E[Y_t] = Y_0 = \left(\frac{q}{p}\right)^k$ est valable pour n'importe quel t. en particulier, si on note T le nombre de sauts pour l'absorption soit en 0 soit en N, en supposant que $T < \infty$, on a $E[Y_T] = \left(\frac{q}{p}\right)^k$.

Exemples: martingale de Moivre (cont'd)

Cette espérance vaut également $E[Y_T] = E[\left(\frac{q}{p}\right)^{S_T}] =$ $P[absorbé\ en\ 0]\left(\frac{q}{p}\right)^0 + P[absorbé\ en\ N]\left(\frac{q}{p}\right)^N$ avec $P[absorbé\ en\ 0] = 1 - P[absorbé\ en\ N]$.

En utilisant les deux expression de l'espérance $E[Y_T]$ et en notant $\rho = \frac{q}{p}$, on déduit que $P[absorbé\ en\ 0] = \frac{\rho^k - \rho^N}{1-\rho^N}$, ce qui caractérise la probabilité de ruine sachant que l'on part d'un niveau de richesse $S_0 = k$.

Information et filtration

La notion de martingale s'étend au cas plus général d'un espace probabilisé (Ω, A, P) ou $F = \{F_0, F_1, \dots\}$ est une séquence de sous-tribus (sous σ-algèbres) de A lorsque $F_t \subseteq F_{t+1}$, $\forall t$.

On dit que F forme une *filtration*. La séquence $F = \{F_0, F_1, \dots\}$ va alors représenter la façon dont évolue l'information au cours du temps.

Dès qu'un événement est connu en t, c.à.d. appartient à l'information disponible à la date t, il sera également connu en $t + 1$ puisqu'il appartiendra à l'information disponible à la date $t + 1$.

Processus adapté

Une séquence (ou processus) $Y = \{Y_t; t \geq 0\}$ sera dite *adaptée* si elle est F_t-mesurable pour tout t, c.à.d. qu'en connaissant F_t on connaît la réalisation du processus.

La réalisation Y_t du processus Y n'est que fonction de l'information disponible à la date t. Dans ce cadre on dit que Y est une *martingale par rapport à la filtration* F si pour tout $t \geq 0$

1. $E \mid Y_t \mid < \infty$
2. $E[Y_{t+1} \mid F_t] = Y_t$.

Sous-martingale et sur-martingale

Il existe beaucoup de cas où l'égalité $E[Y_{t+1} \mid F_t] = Y_t$ définissant une martingale ne tient pas, mais doit être remplacée par une inégalité.

On dit que Y est une *sous-martingale* par rapport à la filtration F si pour tout $t \geq 0$

1. $E[\max(0, Y_t)] < \infty$
2. $E[Y_{t+1}|F_t] \geq Y_t$.

Le processus prendra en moyenne demain une valeur supérieure à celle prise aujourd'hui.

De même, on dit que Y est une *sur-martingale* par rapport à la filtration F si pour tout $t \geq 0$

1. $E[-\min(0, Y_t)] < \infty$
2. $E[Y_{t+1}|F_t] \leq Y_t$.

Décomposition de Doob

La décomposition de Doob permet de caractériser n'importe quelle sousmartingale comme la somme de deux composantes, l'une prévisible croissante et l'autre martingale: $Y_t = S_t + M_t$.

La séquence $S = \{S_t; t \geq 0\}$ est dite *prévisible* si elle est F_{t-1}-mesurable. Elle sera dite *croissante* si $S_0 = 0$ et $P[S_t \leq S_{t+1}] = 1$ pour tout t.

S_t représente la partie de Y_t que l'on peut prédire à partir de l'information disponible à la date $t-1$ et est appelé le compensateur de la sous-martingale.

Décomposition de Doob (cont'd)

On compense Y_t à l'aide de S_t de telle façon que $Y_t - S_t = M_t$ devienne une martingale.

La martingale M_t représente la partie que l'on ne peut prédire, c.à.d. l'innovation ou terme d'erreur par rapport à ce que l'on connaît en $t + 1$.

On peut montrer que cette décomposition est unique.

Décomposition de Doob (cont'd)

Cette décomposition est utilisée en finance pour décomposer l'évolution d'un portefeuille d'actifs financiers en une partie prévisible et une partie non prévisible.

La partie non prévisible sera en moyenne nulle. On ne s'intéressera donc qu'à l'évolution de la partie prévisible dans la recherche des allocations optimales nécessaires à atteindre un objectif de rendement moyen donné, comme par exemple le taux d'intérêt sans risque.

Décomposition de Doob (cont'd)

Cette utilisation de la décomposition de Doob est à la base de la généralisation au cas dynamique du principe de valorisation vu dans la cadre du modèle binomial à savoir que le prix d'un actif est égal à l'espérance de ses flux actualisés où l'espérance est prise par rapport à une probabilité neutre au risque.