Processus Stochastiques

Olivier Scaillet

University of Geneva and Swiss Finance Institute

Outline

Processus Stochastique

Les processus stochastiques servent à modéliser l'état d'un système dépendant du temps et du hasard.

On se donne un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et une fonction $(t, \omega) \to X(t, \omega)$ de $\mathbb{R}^+ \times \Omega$ dans un espace E représentant l'état du système.

Pour ω fixe, c.à.d. une évolution particulière du système, les états successifs sont représentés par la fonction $t \to X(t, \omega)$ que l'on appelle *trajectoire* par analogie avec un système concernant la position d'une particule.

Définition: processus stochastiques

Un *processus stochastique* $X = \{X_t, t \in T\}$ est une suite de v.a. définies sur le même espace probabilisé et indicées par le temps t prenant ses valeurs dans un ensemble T d'indices.

- Si $T = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ ou $T = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$, on parle de *processus en temps discret*
- Si l'ensemble $T = \mathbb{R}^+$ ou $T = \mathbb{R}$, on parle de *processus en temps continu*.

Exemple: marche aléatoire simple

Soit $X_1, X_2, \ldots$ une suite de v.a. indépendantes, chacune prenant la valeur 1 avec probabilité p et la valeurs –1 avec probabilité $1 - p$.

Soit le processus somme $S_t = S_0 + \sum_{i=1}^{t} X_i$. La suite $S = \{S_t, t \in \mathbb{N}\}$ est une *marche aléatoire* partant de S_0.

Souvent S_t représente la fortune d'un joueur ayant joué t parties, recevant 1 franc s'il gagne, payant 1 franc s'il perd et ayant une richesse initiale de S_0 francs.

On peut s'intéresser dans ce cas à $P[S_t \leq 0]$ (probabilité de ruine), ou $\min t \in T : S_t \leq 0$ (temps d'arrêt), par exemple.

Exemple: marche aléatoire simple (cont'd)

On peut réécrire la marche aléatoire $S_t = S_{t-1} + X_t$. La particule étant à une place S_{t-1} à la date $t-1$ peut se déplacer à gauche de 1 unité avec une probabilité p ou à droite de 1 unité avec une probabilité $1-p$.

Propriétés:

1. Spatialement homogène:
   $P[S_t = j|S_0 = a] = P[S_t = j + b|S_0 = a + b]$
2. Temporellement homogène:
   $P[S_t = j|S_0 = a] = P[S_{t+h} = j|S_h = a]$
3. Propriété de Markov:
   $P[S_{t+1} = j|S_0 = s_0, \ldots, S_t = s_t] = P[S_{t+1} = j|S_t = s_t], \forall t$
   (conditionnellement au présent, le futur ne dépend pas du passé)

On dit que le processus est sans mémoire. La marche aléatoire est un cas particulier de chaîne de Markov.

Définition: Chaînes de Markov

On s'intéresse à un processus X en temps discret prenant des valeurs dans un espace dénombrable appelé *espace des états*.

Le processus X est une chaîne de Markov s'il satisfait la condition de Markov
$$P[X_t = x | X_0 = x_0, X_1 = x_1, \ldots, X_{t-1} = x_{t-1}] = P[X_t = x | X_{t-1} = x_{t-1}]$$
pour tout t.

Cette propriété de Markov est équivalente à
$$P[X_{t+1} = x | X_{t_1} = x_{t_1}, X_{t_2} = x_{t_2}, \ldots, X_{t_k} = x_{t_k}] = P[X_{t+1} = x | X_{t_k} = x_{t_k}]$$
avec $0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_k \leq t$, ou encore
$$P[X_{t+h} = x | X_0 = x_0, X_1 = x_1, \ldots, X_t = x_t] = P[X_{t+h} = x | X_t = x_t]$$
pour tout t, h.

Définition: Chaînes de Markov (cont'd)

On peut généraliser à des chaînes de Markov d'ordre r:

$$P[X_t = x|X_0 = x_0, X_1 = x_1, \ldots, X_{t-2} = x_{t-2}, X_{t-1} = x_{t-1}]$$
$$= P[X_t = x|X_{t-1} = x_{t-1}, X_{t-2} = x_{t-2}, \ldots, X_{t-r} = x_{t-r}]$$

Comme l'espace des états est dénombrable, on peut l'identifier à l'esprace des entiers. On dit que lorsque $X_t = i$, la chaîne est dans l'état i à l'étape t, ou encore visite i ou prend la valeur i.

On voit que l'évolution de la chaîne dépend des probabilités $P[X_t = j|X_{t-1} = i]$ appelées *probabilités de transition*. De manière générale, elles dépendent de t, i, et j. Néanmoins, on se limite souvent au cas où elles dépendent de i et j, mais pas de t.

Homogénéité

On se limite souvent au cas où probabilités de transition dépendent de i et j, mais pas de t. Une chaîne X de Markov est dite *homogène* si $P[X_{t+1} = j | X_t = i] = P[X_1 = j | X_0 = i], \forall t, i, j$. Il s'agit d'une propriété de stabilité des probabilités dans le temps.

La matrice $P = (p_{ij})$ avec $p_{ij} = P[X_{t+1} = j | X_t = i]$ est la *matrice de transition* de la chaîne. La matrice P de transition est une matrice stochastique, c.à.d. qu'elle satisfait:

1. les entrées de P sont non négatives: $p_{ij} \geq 0, \forall i, j$.
2. les sommes sur les colonnes de P valent 1: $\sum_j p_{ij} = 1, \forall i$.

Exemple: marche aléatoire simple

On se déplace de 1 à droite (passe de i à $i+1$) avec probabilité p et de -1 à gauche (passe de i à $i-1$) avec probabilité $1-p$.

L'espace des états est $\{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ et les probabilités de transition sont $p_{ij} = P[S_t = j | S_{t-1} = i] = \begin{cases} p & si\ j = i+1 \\ 1-p & si\ j = i-1 \\ 0 & sinon. \end{cases}$.

Transition en plusieurs étapes

On peut s'intéresser à l'évolution de la chaîne dans h étapes (horizon h). La matrice $P(t, t+h)$ de transition de h étapes est la matrice constituée des probabilités de transition en h étapes: $p_{ij}(t, t+h) = P[X_{t+h} = j | X_t = i]$.

L'hypothèse d'homogénéité correspond à supposer $P(t, t+1) = P$ (la matrice de transition ne dépend pas du temps).

En utilisant les équations de Chapman-Kolmogorov: $p_{ij}(t, t+h+l) = \sum_k p_{ik}(t, t+h) p_{kj}(t+h, t+h+l)$, ce qui est équivalent à avoir des matrices de transition satisfaisant $P(t, t+h+l) = P(t, t+h) P(t+h, t+h+l)$.

Transition en plusieurs étapes (cont'd)

On obtient dans le cas homogène $P(t, t+2) = P(t, t+1+1) = P(t, t+1)P(t+1, t+1+1) = PP = P^2$. Par récurrence $P(t, t+h) = P^h$ et $P(t, t+h+l) = P^h P^l = P^{h+l}$.

En particulier, $P(t, t+h) = P(0, 0+h) = P^h$.

Le développement de la chaîne dépend de ce qui se passe à l'instant 0 et de la matrice de transition P. Soit $\mu_i^{(t)} = P[X_t = i]$ et le vecteur ligne correspondant $\mu^{(t)} = (\mu_i^{(t)})$.

On peut montrer $\mu^{(t)} = \mu^{(0)} P^t$, ce qui veut dire que l'évolution aléatoire de la chaîne est caractérisée par la matrice P de transition et par la fonction de masse de probabilité initiale $\mu^{(0)}$.

Classification des états

On peut songer au développement d'une chaîne comme correspondant au mouvement d'une particule. On peut dès lors s'intéresser au temps (peut-être infini) que mettra la particule à revisiter son point de départ.

L'état i est dit *récurrent* (ou *persistant*) si $P[X_t = i | X_0 = i] = p_{ii}(t) = 1$ pour un certain $t \geq 1$.

L'état i est dit *transitoire* (ou *transient*) si cette probabilité est strictement inférieure à 1.

Temps de premier passage

On peut également regarder les temps de premier passage $f_{ij}(t) = P[X_1 \neq j, X_2 \neq j, \ldots, X_{t-1} \neq j, X_t = j | X_0 = i]$, à savoir la probabilité que la première visite de l'état j se fasse en t étapes en partant de i.

Définissons la probabilité que la chaîne visite un jour l'état j en partant de i par $f_{ij} = \sum_{t=1}^{\infty} f_{ij}(t)$.

L'état j est récurrent si et seulement si $f_{jj} = 1$.

Soit $T_j = \min\{t \geq 1 : X_t = j\}$ le *temps de première visite* de l'état j avec la convention $T_j = \infty$ si la visite ne se fait jamais.

L'état j est transitoire si et seulement si $P[T_i = \infty | X_0 = i] > 0$.

Temps moyen de récurrence

On obtient également que le temps moyen de récurrence m_i de l'état i est donné par

$$m_i = E[T_i | X_0 = i] = \begin{cases} \sum_t t f_{ii}(t) & si\ i\ récurrent \\ \infty & si\ i\ transitoire \end{cases}$$

m_i peut cependant être infini pour un état récurrent i et on a:

- i est dit *nul* si $m_i = \infty$
- i est dit *non-nul* (ou *positif*) si $m_i < \infty$

Périodicité

La période $d(i)$ d'un état i est définie comme étant le plus grand commun diviseur de toutes les valeurs t telles que $p_{ii}(t) > 0$.

L'état est dit

- *périodique* si $d(i) > 1$
- *apériodique* si $d(i) = 1$

On aura donc que $p_{ii}(t) = 0$ sauf si t est un multiple de $d(i)$.

Un état est dit *ergodique* s'il est récurrent, non-nul et apériodique.

Classification des chaînes

On obtient une classification de chaînes en regardant la façon dont les états sont liés entre eux.

- L'état j est *accessible* de l'état i s'il existe un t tel que $p_{ij}(t) > 0$
- L'état i *communique* avec l'état j, noté $i \rightarrow j$, si j est accessible de i
- Les états i et j *intercommuniquent*, noté $i \leftrightarrow j$, si i communique avec j et inversément

Si $i \leftrightarrow j$, alors

1. i et j ont la même période
2. i est transitoire si et seulement si j est transitoire
3. i est nul récurrent si et seulement si j est nul récurrent

Classification des chaînes (cont'd)

Un ensemble C d'états est dit

- fermé si $p_{ij} = 0$ pour tout $i \in C$, $j \notin C$
- irréductible si $i \leftrightarrow j$ pour tout $i, j \in C$

Lorsque la chaîne atteint un état appartenant à un ensemble fermé, elle ne quitte plus jamais cet ensemble.

Un ensemble fermé contenant exactement un seul élément (singleton) est dit *absorbant*.

Distribution stationnaire

Comment se comporte une chaîne de Markov si on attend suffisamment longtemps? On s'intéresse à la distribution de X_t lorsque t est grand. L'existence de distribution limite pour X_t lorsque $t \to \infty$ est fortement liée à l'existence d'une distribution stationnaire.

Le vecteur π est appelé *distribution stationnaire* de la chaîne si π a comme entrées (π_j) telles que

1. $\pi_j \geq 0$ pour tout j, et $\sum_j \pi_j = 1$
2. $\pi = \pi P$, c.à.d. $\pi_j = \sum_i \pi_i p_{ij}$ pour tout j

Distribution stationnaire (cont'd)

En itérant, on voit que $\pi = \pi P^t$, pour tout t. En outre, on a vu que pour une chaîne homogène $\mu^{(t)} = \mu^{(0)} P^t$ avec $\mu^{(t)} = (\mu_i^{(t)})$ composé de $\mu_i^{(t)} = P[X_t = i]$.

Ainsi, si $\mu^{(0)} = \pi$, c.à.d. que X_0 est distribué selon π, alors X_t sera également distribué selon π.

La distribution de X_t est stationnaire alors que le temps passe.

Dans ce cas, π sera également la distribution de X_t lorsque $t \to \infty$.

Distribution stationnaire (cont'd)

Une chaîne irréductible a une distribution stationnaire π si et seulement si tous les états sont non-nuls récurrents.

Dans ce cas, π est l'unique distribution stationnaire et est donnée par $\pi_i = m_i^{-1}$ avec m_i le temps moyen de récurrence de i.
Pour une chaîne irréductible apériodique, on a que $p_{ij}(t) \to m_j^{-1}$, $\forall i, j$ lorsque $t \to \infty$.

Application en assurance

Les chaînes de Markov ont des applications en assurance:

- système de bonus-malus
- chaîne de réassurance

Système de bonus-malus

Utilisation des chaînes de Markov pour modéliser un problème d'assurance automobile: système de bonus-malus.

On part d'un nombre L fini de classes (groupes tarifaires) et les primes d'assurance dépendent de la classe où l'assuré se trouve.

Chaque année la classe de l'assuré est déterminée suivant la classe de l'année précédente et du nombre de sinistres reportés pendant l'année.

Si aucun sinistre n'est reporté par l'assuré, il reçoit un bonus exprimé sous forme de passage à une classe ayant une prime moins forte. Au contraire, si des sinistres sont reportés, il reçoit un malus exprimé sous forme de passage à une classe ayant une prime plus forte.

Modèle: système de bonus-malus

Les ingrédients de la modélisation sont

- L classes numérotées de 1 à L. La classe 1 est appelée superbonus et la classe L supermalus. La prime annuelle dépend du nombre d'assurés dans la classe et est calculée à partir d'une échelle tarifaire.
- une échelle tarifaire $b = (b_1, \ldots, b_L)$ avec $b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_L$
- une règle de transition qui stipule comment le transfert d'une classe à une autre est déterminé lorsque le nombre de sinistres est connu. Si k sinistres sont reportés on prend $t_{ij}(k) = 1$ si la police est transférée de la classe i à la classe j, et $t_{ij}(k) = 0$ sinon
- une classe initiale i_0 pour une nouvelle police entrant dans le système.

Soit $T(k) = (t_{ij}(k))$, chaque $T(k)$ est une matrice $0 - 1$ ayant dans chaque ligne exactement un seul 1.

Modèle: système de bonus-malus (cont'd)

Supposons que le nombre de sinistres reportés annuellement forme une séquence $Y_1, Y_2, \ldots$ de variables indépendantes de même loi et de fonction de masse $P[Y = k] = q_k$.

On note $X_1, X_2, \ldots$ les classes successives par lesquelles l'assuré passe et on suppose que la classe d'une année n'est déterminée que par la classe de l'année précédente et du nombre de sinistres reportés dans l'année. Dans ce cadre, on peut exprimer l'évolution de $\{X_t\}$ à l'aide de l'équation de récurrence $X_t = \phi(X_{t-1}, Y_t)$, avec $\phi(i, k) = j$ si et seulement si $t_{ij}(k) = 1$.

Modèle: système de bonus-malus (cont'd)

Cette évolution correspond à une chaîne de Markov dont les probabilités de transition que la police passe de la classe i à la classe j sont données par $p_{ij} = \sum_{k=1}^{\infty} q_k t_{ij}(k)$.

En pratique, on suppose souvent que le nombre de sinistres reportés est décrit par une loi de Poisson de paramètre λ ce qui donne $p_{ij} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} t_{ij}(k)$.

Modèle: système de bonus-malus (cont'd)

Dans le système de bonus malus, chaque fois que l'assuré visite la classe i, on lui applique le tarif b_i. Il peut donc s'intéresser

- au total cumulé des primes payées jusqu'en t: $R_t = \sum_{k=0}^{t-1} b_{X_k}$
- au total cumulé actualisé des primes payées jusqu'en t: $R_t^a = \sum_{k=0}^{t-1} \frac{b_{X_k}}{(1+r)^k}$, avec r comme taux d'intérêt
- au total cumulé actualisé des primées payées pour un horizon infini: $R_\infty^a = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_{x_k}}{(1+r)^k}$.

Modèle: système de bonus-malus (cont'd)

On peut montrer que lorsque la chaîne part de la classe initiale $X_0 = i_0$, on a

- $E[R_t] = e_{i_0} \sum_{k=0}^{t-1} P^k b'$
- $E[R_t^a] = e_{i_0}(Id - (1+r)^{-1}P)^{-1}(Id - (1+r)^{-n}P^n)b'$
- $E[R_\infty^a] = e_{i_0}(Id - (1+r)^{-1}P)^{-1}b'$,

avec e_{i_0} dénotant le vecteur ligne composé de zéros excepté le $i_0$ème composant égal à un.

On peut ausi montrer que si la chaîne admet une distribution stationnaire π, $E[R_t^a]$ s'exprime comme combinaison linéaire du taux de prime stationnaire, $\bar{b} = \pi b'$, c.à.d. la prime stationnaire espérée par étape.

Chaîne de réassurance

Supposons qu'un actif tel qu'un avion doive être assuré. Sa valeur est trop grande pour qu'une compagnie seule puisse supporter le risque.

On part de l'instant 0 avec l'assureur de premier rang. Celui-ci va entamer des négociations avec des assureurs de second rang auxquels il va revendre une partie de la police originale. Chacune de ces compagnies de second rang va elle-même se tourner vers un troisième rang, et ainsi de suite. Cette séquence correspond à une *chaîne* (simplifiée) *de réassurance.*

Modèle: chaîne de réassurance

Nous supposons que chaque compagnie a besoin d'un certain intervalle de temps (démarches administratives) de fonction de répartition F avant de signer simultanément tous ses contrats de réassurance.

Le nombre de compagnies de réassurance est supposé distribué de façon aléatoire avec une certaine fonction de masse de probabilité.

Chaque compagnie commence sa chaîne de recherche, indépendamment de l'histoire des autres compagnies ayant agi préalablement ou simultanément. Tous les temps administratifs sont indépendants et distribués selon F.

Modèle: chaîne de réassurance (cont'd)

La séquence $\{X_t\}$ comptant le nombre de compagnies dans chaque lien de la chaîne à la date t ($t$ème rang) est appelé processus de branchement de Galton-Watson-Bienaymé.

Soit $R_{t,i}$ le nombre de compagnies liées à la compagnie i dans le lien t. On suppose tous les $R_{t,i}$ indépendants et identiquement distribués. Le processus $\{X_t\}$ défini par $X_1 = 1$, $X_{t+1} = \sum_{i=1}^{X_t} R_{t,i}$ est une chaîne de Markov.

On peut montrer que le nombre moyen de compagnies dans le lien $t = n$ à savoir $E[X_n]$ vaut $E[X_n] = m^n$ où m est la moyenne des entreprises contactées à n'importe quel lien par une entreprise quelconque.

Application en finance

Les chaînes de Markov ont des applications en finance:

- changement de notation de crédit
- modèle binomial d'évaluation d'options

Changement de notation de crédit

Un changement dans la qualité d'un émetteur au sens d'une augmentation ou diminution de sa probabilité de défaillance entraîne un changement de prix des actifs (obligations) émis par celui-ci. Cette qualité est mesurée à l'aide d'une *notation* (rating).

On peut avoir défaut de l'émetteur, amélioration ou détérioration de sa notation. Il est donc important d'évaluer ces changements probables dans le cadre d'une gestion quantitative du risque de défaut lorsque l'on détient un portefeuille d'actifs risqués.

Si les rentabilités sont approximativement distribuées selon une loi normale, la moyenne et la variance suffisent pour avoir une idée de l'arbitrage risque-rentabilité. Lorsque l'on fait face à un risque de défaut, les rentabilités ne seront plus normalement distribuées car dès que l'on est en présence d'un défaut on perd toute la valeur des actifs ou du moins une grosse partie de ses avoirs.

Changement de notation de crédit (cont'd)

Il y a donc accumulation de rentabilités fortement négatives (grosses pertes) et la distribution devient asymétrique (skewness) avec des probabilités d'évènements extrêmes plus élevées que la loi normale (kurtosis).

L'écart-type (ou la variance) est une mesure symétrique du risque et ne sera plus appropriée dans ce cadre. On préfère utiliser des quantiles de la distribution des rentabilités (ou de la valeur) du portefeuille.

Ces calculs de quantiles se font à l'aide de simulations des changements de valeurs des actifs financiers au cours du temps (horizon d'un an, deux ans, ...). On tiendra compte des changements des conditions de marché (taux d'intérêt, taux de change, ...) mais également des changements dans le risque de crédit (défaut, changement de rating) pour modéliser les changements.

Modèle: changement de notation de crédit

Dans le risque de crédit on utilise une chaîne de Markov dont les états représentent les ratings.

On modélisera donc les probabilités de migration entre ratings et les probabilités de faire défaut, par exemple, passage du rating AAA au rating AAB, passage du rating BBB à un défaut, ... Ces probabilités sont en général estimées à partir de données historiques de changement de rating et de défaillance d'entreprises.

Modèle: changement de notation de crédit (cont'd)

Il suffit ensuite de simuler:

1. les évolutions de la chaîne de Markov pour obtenir les différents changements de rating des actifs du portefeuille
2. les évolutions des variables financières pour obtenir les différents changements de valeurs dus à l'évolution des marchés financiers
3. construire l'histogramme des gains et pertes de valeurs du portefeuille à un an, deux ans, ...

Dès que l'histogramme est disponible on peut calculer les quantiles de perte du portefeuille.

On définit le capital économique comme étant la différence entre un quantile extrême de perte (quantile à 99,9%) et la moyenne des pertes, c.à.d. la perte espérée. Ce capital économique est un coussin de sécurité pour amortir l'impact des pertes inattendues dans les crédits dues à des défauts.

Evaluation d'options

Une *option* est un actif financier qui donne à son détenteur le droit mais non l'obligation d'*acheter* ou *vendre* une certaine quantité d'un autre actif financier à une *date* et pour un *prix* fixé à l'avance.

Différents éléments interviennent dans la définition:

- nature de l'option: *call* (option d'achat), *put* (option de vente)
- actif sous-jacent: action, obligation, taux de change, taux d'intérêt, ... (valeur au temps t notée S_t)
- quantité: nombre d'actifs
- échéance: date d'expiration (notée T)
- price d'exercice: prix auquel la transaction a lieu (noté K)
- nature de l'exercice: européenne (à l'échéance), américaine (jusqu'à l'échéance)
- coût de l'option: prime

Paiement d'une option européenne

Dans le cas d'une option d'achat (call)

- si $S_T > K$ on exerce l'option et le profit est de $S_T - K$ car on paie un prix K pour un actif que l'on peut revendre sur le marché à un prix S_T
- si $S_T \leq K$ on n'exerce pas l'option et le profit est nul, car on ne va pas acheter l'option à un prix plus élevé que celui prévalant sur le marché.

Ainsi la fonction de paiement du call à l'échéance (valeur du call à l'échéance) vaut $\max(S_T - K, 0) = (S_T - K)_+$. Par un raisonnement symétrique, le paiement du put à l'échéance vaut $(K - S_T)_+$.

Evaluation et couverture

Le vendeur de l'option fait face à deux problèmes:

1. problème d'évaluation: déterminer la valeur aujourd'hui de son engagement futur
2. problème de couverture: être sur de pouvoir honorer son engagement futur.

L'hypothèse de base dans l'évaluation des actifs financiers est l'absence d'opportunité d'arbitrage (A.O.A. ou no free lunch), c.à.d. qu'il est impossible de réaliser un profit (supérieur au taux sans risque) sans mise de fonds initiale et sans prendre risque.

Relation de parité put-call

A partir de cette hypothèse on peut obtenir la relation de parité put-call comme conséquence directe. Cette relation s'écrit $C_t - P_t = S_t - Ke^{-r(T-t)}$. La différence entre le prix du call et le prix du put de même prix d'exercice et de même maturité est égale à la différence du prix de l'actif sous-jacent et du prix d'exercice actualisé.

On peut également établir des bornes sur les prix à partir de l'hypothèse d'A.O.A.:

- $S_t > C_t > \max(S_t - Ke^{-r(T-t)})$
- $Ke^{-r(T-t)} > P_t > \max(Ke^{-r(T-t)} - S_t, 0)$

Ces relations ne sont dues qu'à l'hypothèse d'A.O.A. et non pas à une quelconque hypothèse sur l'évolution des prix des actifs (modèle de la dynamique suivie par les prix).

Evaluation d'une option européenne (cont'd)

Malheureusement

1. ce n'est pas suffisant pour obtenir un prix unique
2. les bornes sont très larges.

On a donc besoin d'un modèle de l'évolution du prix de l'actif sous-jacent. Le modèle le plus connu d'évaluation est le *modèle de Black-Scholes* (1973). C'est un modèle en temps continu qui peut être obtenu comme modèle limite du modèle binomial en temps discret lorsque l'intervalle de temps entre deux mouvements de prix tend vers zéro.

Modèle binomial à une période

- Une seule période (deux dates, t et $t+1$),
- deux états du monde: état haut ($S_t \rightarrow S_{t+1} = uS_t$) et état bas ($S_t \rightarrow S_{t+1} = dS_t$), où $d < u$ sont des coefficients multiplicatifs.
- deux actifs financiers: action (S_t), actif sans risque ($1 \rightarrow 1 + r$ quel que soit l'état du monde)

On va voir que les valeurs des probabilités de survenance des deux états du monde n'ont aucune importance pour la valorisation du prix d'une option.

Modèle binomial à une période (cont'd)

Hypothèse: $dS_t < K < uS_t$. En effet, si $K < dS_t < uS_t$, l'acheteur exercera toujours son option et personne ne voudra lui en vendre une (et inversément pour $K > dS_t > uS_t$).

On cherche à déterminer le prix du call à la date t. La fonction de paiement à la date $t+1$ est $\max(S_{t+1} - K, 0)$, soit

- $\max(uS_t - K, 0) = uS_t - K$ dans l'état haut
- $\max(dS_t - K, 0) = 0$ dans l'état bas.

Evaluation par réplication

De façon à déterminer le prix de l'option, on va construire un portefeuille constitué de l'action et de l'actif sans risque qui va dupliquer la fonction de paiement de l'option.

Si on ne peut pas réaliser d'arbitrage le prix de l'option et le prix du portefeuille doivent être les mêmes, car ils auront tous deux les mêmes fonctions de paiement à l'échéance quel que soit l'état du monde réalisé.

Si ce n'est pas le cas cela veut dire que l'on peut réaliser un arbitrage. Il suffit de vendre l'actif le plus cher et d'acheter l'actif le moins cher. On réalise immédiatement un profit constitué de la différence entre les deux prix et on ne prend aucun risque car à l'échéance les positions acheteuse et vendeuse se compensent (mêmes fonctions de paiement à l'échéance quel que soit l'état réalisé).

Evaluation par réplication (cont'd)

On note les quantités du portefeuille: α_1 la quantité d'actions, α_2 la quantité d'actifs sans risque.

- A la date t, la valeur du portefeuille est $\alpha_1 S_t + \alpha_2$
- à la date $t+1$, la valeur du portefeuille est $\alpha_1 S_{t+1} + \alpha_2(1+r)$, soit $\alpha_1 uS_t + \alpha_2(1+r)$ dans l'état haut, et $\alpha_1 dS_t + \alpha_2(1+r)$ dans l'état bas.

Comme on désire construire un portefeuille dupliquant la fonction de paiement de l'option, il suffit de trouver les valeurs de α_1 et α_2 de telle façon que la fonction de paiement de l'option soit identique à celle du portefeuille à l'échéance, soit:

- $\alpha_1 uS_t + \alpha_2(1+r) = uS_t - K$
- $\alpha_1 dS_t + \alpha_2(1+r) = 0.$

Evaluation par réplication (cont'd)

On obtient ainsi un système de deux équations à deux inconnues dont la résolution donne : $\alpha_1^* = \frac{uS_t - K}{uS_t - dS_t}$ et $\alpha_2^* = -\frac{(uS_t - K)dS_t}{(uS_t - dS_t)(1+r)}$.

On voit donc que le prix de l'option aujourd'hui doit être égal au prix du portefeuille de composition α_1^*, α_2^* si on veut éviter un quelconque arbitrage. Le prix de l'option est ansi donné par $C_t = \alpha_1^* S_t + \alpha_2^* = \frac{uS_t - K}{uS_t - dS_t} S_t - \frac{(uS_t - K)dS_t}{(uS_t - dS_t)(1+r)}$.

Evaluation par espérance risque neutre

En notant $\pi = \frac{(1+r)S_t - dS_t}{uS_t - dS_t} = \frac{(1+r)-d}{u-d}$, on peut réécrire le prix du call comme $C_t = \frac{1}{1+r}[\pi(uS_t - K) + (1-\pi)0]$.

Cette expression correspond à l'espérance d'une loi binomiale prenant la valeur $\frac{uS_t - K}{1+r}$ avec la probabilité π et la valeur $\frac{0}{1+r}$ avec la probabilité $1-\pi$. Le prix de l'option s'interprète donc comme une espérance des flux de paiement actualisés. Le prix est donné par l'espérance par rapport à la probabilité π de la fonction de paiement de l'option à l'échéance actualisée.

On appelle π la probabilité *neutre au risque* d'avoir un état haut, par opposition à la probabilité p, dite *historique*. La probabilité p n'intervient pas dans la formule d'évaluation de l'option et est donc non relevante dans le calcul du prix!

Probabilité neutre au risque

Soit $(p, 1-p)$ les probabilités historiques de hausse et de baisse du prix de l'action. Comme on n'a que deux états du monde, S_{t+1} suite une loi binomiale qui prendra la valeur uS_t avec probabilité p et la valeur dS_t avec probabilité $1-p$.

Son espérance est donc $E^p[S_{t+1}] = puS_t + (1-p)dS_t$ et le rendement espéré vaut $\frac{E^p[S_{t+1}]}{S_t} = pu + (1-p)d$.

En rajoutant à cette dernière expression $0 = (1+r) - [p(1+r) + (1-p)(1+r)]$, on peut réécrire

$$
\begin{aligned}
\frac{E^p[S_{t+1}]}{S_t} &= (1+r) - [p(1+r) + (1-p)(1+r)] + pu + (1-p)d \\
&= (1+r) + [u - (1+r)]p + [d - (1+r)p](1-p)
\end{aligned}
$$

Probabilité neutre au risque (cont'd)

On voit ainsi que le terme
$\frac{E^p[S_{t+1}]}{S_t} - (1+r) = [u-(1+r)]p + [d-(1+r)p](1-p)$
correspond à une prime de risque, c.à.d. à un supplément de rendement demandé par rapport à l'actif sans risque.

Si on fait les mêmes calculs avec la probabilité π au lieu de p, on obtient pour l'espérance:
$E^\pi[S_{t+1}] = \pi u S_t + (1-\pi) d S_t = (1+r) S_t$.

Le rendement espéré vaut alors $\frac{E^\pi[S_{t+1}]}{S_t} = 1 + r$. Lorsque l'on calcule le rendement espéré en utilisant la probabilité π, il est égal au rendement de l'actif sans risque.

La prime de risque est donc nulle: $\frac{E^\pi[S_{t+1}]}{S_t} - (1+r) = 0$.

Probabilité neutre au risque (cont'd)

L'effet d'utiliser π au lieu de p est de neutraliser le risque (prime de risque mise à zéro) ce qui explique son nom de probabilité neutre au risque.

Lorsque l'on utilise la probabilité π on demande le même rendement que des agents neutres au risque à savoir le taux sans risque. Le résultat général est le suivant:

Dans un modèle à une seule période et deux états du monde, il existe une unique probabilité π appelée neutre au risque telle que pour chaque actif de paiement $x_{t+1} \in \mathbb{R}^2$(vecteur de taille 2) le prix à la date t de cet actif est égal à $P_t = \frac{1}{1+r} E^{\pi}[x_{t+1}]$, c.à.d. l'espérance sous la probabilité neutre au risque de la fonction de paiement actualisée.

Probabilité neutre au risque (cont'd)

Il est à noter que dans la valorisation on n'a pas spécifié de fonction d'utilité.

Il s'agit uniquement d'une valorisation par un raisonnement d'arbitrage et non pas par un raisonnement d'équilibre faisant intervenir la notion d'agent économique caractérisé par une fonction d'utilité.

Dans le calcul on a fait l'hypothèse d'un *marché parfait*:

1. on peut vendre et acheter l'action au même prix (pas de coûts de transaction sur l'actif risqué)
2. on peut emprunter et prêter au même taux d'intérêt (pas de coûts de transactions sur l'actif sans risque)

Dans le modèle qui précède, on a une seule période, deux dates (une chaîne de Markov très courte!). On va maintenant généraliser le modèle à plusieurs périodes.

Modèle binomial à plusieurs périodes

- Plusieurs périodes: n périodes, soit $n+1$ dates
- deux états du monde d'une période à la suivante: haut et bas
- deux actifs financiers: action et actif sans risque

Prenons deux périodes $n=2$, soit trois dates $0,1,2$. Après la fin de la première période, on a deux possibilités: $S_0 \to S_1 = uS_0$ ou $S_0 \to S_1 = dS_0$.

Après la fin de la deuxième période, on a trois possibilités: $S_1 \to S_2 = uuS_0$ ou $S_1 \to S_2 = udS_0 = duS_0$ ou $S_1 \to S_2 = ddS_0$.

On a donc un arbre recombinant c.à.d. que le prix obtenu après une hausse et une baisse est le même qu'après une baisse et une hausse. De plus le prix ne dépend que du prix à la date antérieure (propriété de Markov).

Evaluation par réplication

La fonction de paiement à l'échéance de l'option vaut

- après deux hausses $C_{uu} = \max(S_0 uu - K, 0)$
- après une hausse et une baisse (et vice-versa) $C_{ud} = \max(S_0 ud - K, 0)$
- après deux baisses $C_{dd} = \max(S_0 dd - K, 0)$

Evaluation par réplication (cont'd)

Considérons la deuxième période et l'actif ayant comme paiement

- en cas de hausse $C_{uu} = \max(S_0 uu - K, 0)$
- en cas de baisse $C_{ud} = \max(S_0 ud - K, 0)$.

On voit que l'on se retrouve dans la situation d'un modèle binomial à une période et on peut donc appliquer le principe de valorisation vu précédemment qui consiste à calculer le prix comme l'espérance sous la probabilité neutre au risque des flux actualisés : $P_t = \frac{1}{1+r} E^{\pi}[x_{t+1}]$.

On aura donc

- $C_u = \frac{1}{1+r}[\pi C_{uu} + (1-\pi) C_{ud}]$ après une hausse en première période
- $C_d = \frac{1}{1+r}[\pi C_{ud} + (1-\pi) C_{dd}]$.

Evaluation par réplication (cont'd)

En réappliquant le même principe pour la première période, on déduit $C = \frac{1}{1+r}[\pi C_u + (1-\pi)C_d]$, ce qui donne après remplacement:

$C = \frac{1}{(1+r)^2}[\pi^2(S_0uu - K)_+ + 2\pi(1-\pi)(S_0ud - K)_+ + (1-\pi)^2(S_0dd - K)_+]$.

Cette expression correspond à l'espérance d'une loi binomiale $B(2,\pi)$ dont les événements sont $(S_0uu - K)_+$, $(S_0ud - K)_+$et $(S_0dd - K)_+$ avec probabilités π^2, $2\pi(1-\pi)$ et $(1-\pi)^2$, respectivement.

On obtient à nouveau que le prix de l'actif financier s'écrit comme l'espérance sous la probabilité neutre au risque de ces flux de paiement actualisés.

Généralisation à n périodes

On peut effectuer ensuite la même démarche sur n périodes, soit $n+1$ dates. On a alors

$C = \frac{1}{(1+r)^n} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \pi^j (1-\pi)^{n-j} (u^j d^{n-j} S_0 - K)_+$, avec $\binom{n}{j} = \frac{n!}{j!(n-j)!}$.

L'espérance est ici prise par rapport à la distribution neutre au risque $B(n, \pi)$.

Généralisation à n périodes (cont'd)

Lorsque l'on prend une échéance T et que l'on subdivise l'intervalle $[0, T]$ en n sous-intervalles de longueur T/n on peut montrer que, lorsque n tend vers l'infini, la formule d'évaluation du modèle binomial à plusieurs périodes (temps discret) converge vers la formule de Black-Scholes (modèle en temps continu où le prix du sous-jacent est supposé suivre un mouvement brownien géométrique).

Ce type d'approximation d'un modèle en temps continu par un modèle en temps discret est souvent utile lorsque les calculs sont trop difficiles à mener de manière explicite (schéma numérique d'approximation).