

Introduction

Olivier Scaillet

University of Geneva and Swiss Finance Institute

Outline

- 1 Introduction
- 2 Rappels de probabilité
- 3 Variable aléatoire discrète
- 4 Variable aléatoire continue

But du cours

Ce cours est destiné à fournir une introduction aux *processus stochastiques* en mettant l'accent sur l'utilisation de ceux-ci comme outils de *modélisation en finance et assurance*.

Le cours commence par des rappels de *théorie des probabilités*.

Plan

La première catégorie de processus étudiée sera la classe des *chaînes de Markov*.

On passera ensuite aux *processus de Poisson* et *processus ponctuels* avant de regarder les *martingales*.

On terminera par les *processus de diffusion*.

Applications

Les applications concernent

- l'*évaluation des actifs financiers*
- la *modélisation de leurs prix*
- la *gestion des risques* en finance et assurance.

Justification

« le futur est largement imprévisible »

Pour exprimer ce fait, on parle d'aléa, de phénomènes aléatoires, de probabilité, ...

Ces concepts vont être formalisés en une théorie mathématique construite à partir d'une collection d'axiomes.

Evénements et probabilité

Une expérience est équivalente à un enchaînement de circonstances qui mène à un *résultat*.

Une expérience est dite *aléatoire* s'il est impossible d'en prévoir avec certitude le résultat.

L'ensemble des résultats possibles est appelé *espace fondamental* et est noté Ω .

Un élément de Ω est appelé résultat élémentaire et est noté ω .

Exemples

Jet d'une pièce de monnaie: $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\} = \{Pile, Face\}$

ou éventuellement: $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\} = \{Pile, Face, Tranche\}$

Jet d'un dé à six faces: $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_6\} = \{1, \dots, 6\}$

Le choix de Ω est, dans une certaine mesure, arbitraire puisqu'il dépend des idées a priori que l'on a sur l'expérience aléatoire. Cette part d'arbitraire apparaît en fait chaque fois que l'on veut donner une formalisation mathématique d'un phénomène réel.

Événement aléatoire

Un évènement est dit *aléatoire* si, une fois l'expérience effectuée, on peut dire si cet évènement a été réalisé ou non.

Ainsi un évènement aléatoire A pourra être identifié avec la partie de Ω dont les éléments réalisent A .

On pourrait dès lors songer à considérer tout élément de l'ensemble $\Pi(\Omega)$ des parties de Ω comme un évènement aléatoire. Cependant $\Pi(\Omega)$ est souvent trop vaste (en particulier si $\Omega = \mathbb{R}$), et on se restreint à une classe de parties de Ω strictement contenue dans $\Pi(\Omega)$.

On impose à cette classe des conditions de stabilité de façon à ce que les opérations logiques usuelles, ou plutôt les opérations ensemblistes correspondantes ne fassent pas sortir de cette classe.

Algèbre de Boole

La classe des évènements, notée \mathcal{A} , sera une algèbre de Boole de parties de Ω , c.à.d. une classe de parties de Ω , contenant Ω , stable par intersection, réunion et complémentation. A savoir:

- 1 Si $A, B \subset \mathcal{A}$ alors $A \cup B \subset \mathcal{A}$ et $A \cap B \subset \mathcal{A}$.
- 2 Si $A \subset \mathcal{A}$ alors $A^c \subset \mathcal{A}$.
- 3 L'ensemble vide $\emptyset \subset \mathcal{A}$.

Rappel: vocabulaire logique

- “A et B” $\Leftrightarrow A \cap B$
- “A ou B” $\Leftrightarrow A \cup B$
- “non A” $\Leftrightarrow A^c = \Omega - A$
- “A et B incompatibles” $\Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$
- “A ou B (avec A, B incompatibles)” $\Leftrightarrow A + B$
- “A implique B” $\Leftrightarrow A \subset B$
- “A mais pas B” $\Leftrightarrow A - B$
- “événement certain” $\Leftrightarrow \Omega$
- “événement impossible” $\Leftrightarrow \emptyset$

Probabilité

Par définition d'une expérience aléatoire son résultat ne peut être prévu avec certitude. De même on ne peut prévoir en général si un évènement A se réalisera ou non. Cependant on aimerait affecter à chaque évènement A un poids qui traduirait la chance qu'il a de se réaliser.

L'intuition conduit aussi à penser que

- 1 Si A et B sont incompatibles la chance que A ou B se réalise est donnée par la somme des poids de A et de B .
- 2 Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'évènements tels que chacun d'eux soit impliqué par le suivant et que leur réalisation simultanée soit impossible, alors le poids de A_n a une limite nulle.

Cela mène à la définition d'une probabilité sur un espace fondamental muni d'une algèbre de Boole des évènements.

Définition: probabilité

On appelle *probabilité* sur (Ω, \mathcal{A}) une fonction définie sur \mathcal{A} à valeurs dans $[0, 1]$ vérifiant les trois axiomes:

- 1 Axiome de normalisation : $P(\Omega) = 1$
- 2 Axiome d'additivité dit des probabilités totales:
$$P(A + B) = P(A) + P(B)$$
- 3 Axiome de continuité en \emptyset : Si $A_n \downarrow \emptyset$ lorsque $n \rightarrow \infty$,
$$P(A_n) \rightarrow 0$$

Notations:

- $A + B = A \cup B$ avec $A \cap B = \emptyset$
- $A_n \downarrow \emptyset$ ou $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \emptyset$ signifie que $\forall n \in \mathbb{N}, A \subset A_n$ et
$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = A$$

σ -algèbre

Une algèbre est stable pour les opérations finies d'ensembles mais pas nécessairement pour les opérations dénombrables.

Si on impose une structure stable pour les opérations dénombrables d'ensembles, intersection dénombrable et réunion dénombrable, on parle de σ -algèbre (ou *tribu*).

Une classe de parties de Ω , contenant Ω , stable par intersection dénombrable, réunion dénombrable et complémentation est appelée une σ -algèbre (ou *tribu*) de parties de Ω .

- Tribu grossière: $\mathcal{A} = \{\emptyset, \Omega\}$
- $\mathcal{A} = \{\emptyset, A, A^c, \Omega\}$
- Tribu borélienne $B_{\mathcal{R}}$ construite sur \mathcal{R} à partir des intervalles ouverts

Probabilité conditionnelle

La probabilité $P(B)$ mesure la chance que B a de se réaliser.

Supposons que l'on ait l'information supplémentaire « L'évènement A va se réaliser », A ayant une probabilité $P(A) > 0$. En général la chance que B a de se réaliser va être modifiée. En particulier,

- Si $A \cap B = \emptyset$, cette chance est nulle
- Si $B \subset A$, cette chance devient certaine

Dans l'hypothèse où l'on sait que A se réalise, il est naturel de mesurer la chance qu'un évènement quelconque B a de se réaliser par un nombre proportionnel à $P(A \cap B)$, c.à.d. du type $kP(A \cap B)$, $k > 0$.

Pour que la nouvelle fonction $kP(A \cap \cdot)$ soit une probabilité, on la normalise en imposant que $kP(A \cap \Omega) = kP(A) = 1$, soit $P(A)k = 1$.

Probabilité conditionnelle (cont'd)

Etant donné un espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) et un évènement $A \subset \mathcal{A} : P(A) > 0$, on appelle probabilité conditionnelle d'un évènement B quelconque sachant A , le nombre positif $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$.

Deux évènements A et B sont dits (stochastiquement) indépendants si $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. En particulier si l'un des évènements est de probabilité 1 ou 0 les deux évènements sont indépendants. Si $P(A) > 0$, $P(B) > 0$, l'indépendance se traduit par $P(B|A) = P(B)$ ou $P(A|B) = P(A)$. Le fait de savoir que l'un des deux évènements est réalisé ne modifie pas la probabilité de l'autre.

Probabilité conditionnelle (cont'd)

Plus généralement, une famille $\{A_i; i \in I\}$ est appelée indépendante si $P(\bigcap_{i \in J} A_i) = \prod_{i \in J} P(A_i)$ pour tout ensemble fini $J \subset I$.

Remarques:

- l'indépendance deux à deux des événements ne suffit pas pour l'indépendance, mais l'indépendance entraîne l'indépendance deux à deux.
- si on a n événements ($n > 2$) la condition $P(A_1 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \dots P(A_n)$ ne suffit pour l'indépendance.

Variable aléatoire et distribution

On est souvent intéressé par les conséquences d'un résultat d'une expérience aléatoire, c.à.d par des fonctions du résultat de l'expérience.

Soit (Ω, \mathcal{A}, P) un espace probabilisé, une *variable aléatoire* est une fonction $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ayant la propriété que $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} \subset \mathcal{A}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Une telle fonction est dite *\mathcal{A} -mesurable*.

La *fonction de répartition* (ou *distribution*) d'une v.a. est la fonction $F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ qui décrit la probabilité que X ne dépasse pas x , soit: $F(x) = P(A(x))$ avec $A(x) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\}$, que l'on note plus simplement:

$$F(x) = P(X \leq x), x \in \mathbb{R}.$$

Distribution, masse de probabilité et densité

Une fonction de répartition F a les propriétés suivantes:

- 1 $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0, \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$
- 2 si $x < y$, alors $F(x) \leq F(y)$
- 3 F est continue à droite, $F(x + h) \rightarrow F(x)$ lorsque $h \downarrow 0$.

On distingue les variables discrètes et les variables continues. Une v.a. est dite *discrète* si elle prend uniquement ses valeurs dans un sous-ensemble dénombrable de \mathbb{R} . La v.a. discrète X a une *fonction de masse de probabilité* $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ donnée par $f(x) = P(X = x)$.

Une v.a. est dite continue si sa fonction de répartition peut être exprimée comme $F(x) = \int_{-\infty}^x f(u)du, x \in \mathbb{R}$, où $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ est une fonction intégrable appelée *fonction de densité de probabilité*.

Fonction de répartition

Lorsque l'on a deux variables aléatoires X et Y , on peut s'intéresser à leur comportement aléatoire joint, c.à.d. au comportement du *vecteur aléatoire* (X, Y) .

La *fonction de répartition* d'un vecteur aléatoire $X = (X_1, \dots, X_n)$ est la fonction $F : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$ donnée par $F(x) = P(X \leq x)$, $x \in \mathbb{R}^n$ ou de manière moins compacte par $F(x_1, \dots, x_n) = P(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n)$.

Considérons le cas bivarié (X, Y) pour simplifier les notations. On a les propriétés suivantes:

- 1 $\lim_{x,y \rightarrow -\infty} F(x, y) = 0$, $\lim_{x,y \rightarrow \infty} F(x, y) = 1$
- 2 si $(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2)$ alors $F(x_1, y_1) \leq F(x_2, y_2)$
- 3 F est continue à droite, $F(x + u, y + v) \rightarrow F(x, y)$ lorsque $u, v \downarrow 0$.

Fonction de répartition (cont'd)

On retrouve à partir de la fonction de répartition jointe $F = F_{X,Y}$ du vecteur aléatoire (X, Y) les fonctions de répartition univariées F_X et F_Y de X et Y appelées *fonctions de répartition marginales*.

$$F_X(x) = \lim_{y \rightarrow \infty} F_{X,Y}(x, y)$$

$$F_Y(y) = \lim_{x \rightarrow \infty} F_{X,Y}(x, y)$$

Les v.a. X et Y seront dites discrètes si elles prennent uniquement leurs valeurs dans un sous-ensemble dénombrable de \mathbb{R}^2 . Elles ont une *fonction de masse de probabilité jointe* $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, 1]$ donnée par $f(x, y) = P(X = x, Y = y)$.

Les v.a. X et Y seront dites continues si leur fonction de répartition jointe peut être exprimée comme $F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(u, v) du dv$, $x, y \in \mathbb{R}$, avec $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, \infty)$ une fonction intégrable appelée *fonction de densité de probabilité jointe*.

Définition: variable aléatoire discrète

Une v.a. *discrète* prend uniquement ses valeurs dans un sous-ensemble dénombrable de $\mathbb{R} : \{x_1, x_2, \dots\}$. Sa *fonction de masse de probabilité* $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ donnée par $f(x) = P(X = x)$ satisfait:

- 1 l'ensemble des x tels que $f(x) \neq 0$ est dénombrable
- 2 $\sum_i f(x_i) = 1$, avec x_1, x_2, \dots les valeurs telles que $f(x) \neq 0$.

La *fonction de répartition* est une fonction en escalier avec des sauts situés aux valeurs possibles de la v.a.: $F(x) = \sum_{i: x_i \leq x} f(x_i)$.

Deux v.a. discrètes sont *indépendantes* si les événements $\{X = x\}$ et $\{Y = y\}$ sont indépendants pour tout x et y . Si X et Y sont indépendantes et $g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, alors $g(X)$ et $h(Y)$ le sont également.

Moments d'une variable aléatoire

L'*espérance* (ou valeur moyenne ou valeur espérée) d'une v.a. discrète de fonction de masse f est définie par

$$E[X] = \sum_{x:f(x)>0} xf(x).$$

De même, si X a une fonction de masse f et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, alors

$$E[g(X)] = \sum_{x:f(x)>0} g(x)f(x).$$

Si k est un entier positif, le k *ème moment* μ_k de X est défini par $\mu_k = E[X^k]$. Le k *ème moment centré* m_k de X est défini par $m_k = E[(X - \mu_1)^k]$.

- Espérance: $\mu = \mu_1 = E[X]$
- Variance: $\sigma^2 = m_2 = E[(X - \mu)^2] = E[X^2] - \mu^2 = \mu_2 - \mu^2$
- Ecart-type: $\sigma = \sqrt{m_2}$

Propriétés de l'espérance

Propriétés de l'opérateur espérance E :

- 1 Si $X \geq 0$, alors $E[X] \geq 0$
- 2 Si $a, b \in \mathbb{R}$, alors $E[aX + bY] = aE[X] + bE[Y]$ (linéarité)
- 3 La v.a. X prenant toujours la valeur 1 a comme espérance $E[X] = 1$
- 4 Si X et Y sont indépendantes, alors $E[XY] = E[X]E[Y]$

Deux variables X et Y sont dites *non corrélées* si $E[XY] = E[X]E[Y]$.

Propriétés de la variance, covariance et corrélation

Propriétés de l'opérateur variance Var :

- 1 $Var[aX] = a^2 Var[X]$, $a \in \mathbb{R}$
- 2 $Var[X + Y] = Var[X] + Var[Y]$ si X et Y sont non corrélées.

La covariance entre X et Y est définie par

$Cov[X, Y] = E[XY] - E[X]E[Y]$. Le coefficient de corrélation

entre X et Y est défini par $\rho[X, Y] = \frac{Cov[X, Y]}{\sqrt{Var[X]Var[Y]}}$.

- $Cov[X, X] = Var[X]$
- X et Y sont non corrélées si $Cov[X, Y] = 0$.

Répartition, masse et espérance conditionnelle

La fonction de répartition conditionnelle de Y sachant $X = x$, notée $F_{Y|X}(\cdot|x)$, est définie par $F_{Y|X}(y|x) = P(Y \leq y|X = x)$, pour tout x tel que $P[X = x] > 0$.

La fonction de masse conditionnelle de Y sachant $X = x$, notée $f_{Y|X}(\cdot|x)$, est définie par $f_{Y|X}(y|x) = P(Y = y|X = x)$, pour tout x tel que $P[X = x] > 0$.

- $f_{Y|X} = \frac{f_{X,Y}}{f_X}$
- X et Y sont indépendantes si $f_{Y|X} = F_Y$.

L'espérance conditionnelle de Y étant donné $X = x$ est la fonction $\psi(x) = E[Y|X = x] = \sum_y y f_{Y|X}(y|X = x)$. Comme elle dépend de la valeur prise par X , l'espérance conditionnelle de Y sachant X , $\psi(X) = E[Y|X]$, est une variable aléatoire. On a $E[\psi(X)] = E[Y]$, ce qui signifie que $E[Y] = \sum_x E[Y|X = x]P[X = x]$.

Définition

Une v.a. *continue* a une fonction de répartition satisfaisant $F(x) = \int_{-\infty}^x f(u)du$ avec $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ intégrable appelée *fonction de densité* de X .

- 1 $\int_{-\infty}^{\infty} f(u)du = 1$

- 2 $P[X = x] = 0, \forall x \in \mathbb{R}$ (La quantité de valeurs possibles pour une variable continue est non dénombrable. Cette quantité est donc tellement large que la probabilité que la v.a. prenne une valeur particulière est nulle)

- 3 $P[a \leq X \leq b] = \int_a^b f(u)du$ (La valeur numérique $f(x)$ n'est pas une probabilité. Cependant, on peut songer à $f(x)dx$ comme une probabilité:

$$P[x < X < x + dx] = F(x + dx) - F(x) \cong f(x)dx$$

Deux v.a. discrètes sont *indépendantes* si les événements $\{X = x\}$ et $\{Y = y\}$ sont indépendants pour tout x et y . Si X et Y sont indépendantes et $g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, alors $g(X)$ et $h(Y)$ le sont également.

Moments d'une variable aléatoire

L'*espérance* (ou valeur moyenne ou valeur espérée) d'une v.a. continue de fonction de densité f est définie par

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} uf(u)du.$$

De même, si X a une fonction de masse f et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, alors

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(u)f(u)du.$$

Si k est un entier positif, le k ème moment μ_k de X est défini par $\mu_k = E[X^k] = \int_{-\infty}^{\infty} u^k f(u)du$. Le k ème moment centré m_k de X est défini par $m_k = E[(X - \mu_1)^k]$.

- Espérance: $\mu = \mu_1 = E[X]$
- Variance: $\sigma^2 = m_2 = E[(X - \mu)^2] = E[X^2] - \mu^2 = \mu_2 - \mu^2$
- Ecart-type: $\sigma = \sqrt{m_2}$

Répartition, densité et espérance conditionnelle

La fonction de répartition conditionnelle de Y sachant $X = x$, notée $F_{Y|X}(\cdot|x)$, est définie par $F_{Y|X}(y|x) = \int_{-\infty}^y \frac{f(x,u)}{f_X(x)} du$, pour tout x tel que $f_X(x) > 0$.

La fonction de densité conditionnelle de Y sachant $X = x$, notée $f_{Y|X}(\cdot|x)$, est définie par $f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)}$, pour tout x tel que $f_X(x) > 0$.

L'espérance conditionnelle de Y étant donné $X = x$ est la fonction $\psi(x) = E[Y|X = x] = \int_{-\infty}^{\infty} u f_{Y|X}(u|X = x) du$. La variable aléatoire $\psi(X) = E[Y|X]$ satisfait en particulier $E[\psi(X)] = E[Y]$, ce qui signifie que $E[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} E[Y|X = u] f_X(u) du$.