Nom: Genève, 26 mai 2008.
Prénom:

Processus aléatoires avec application en finance

- La durée de l'examen est de deux heures.
- N'oubliez pas d'indiquer votre nom et prénom sur chaque feuille.
- Toute documentation et calculatrice sont interdites.
- Veuillez justifier les réponses. Une réponse peu claire ou imprécise joue en votre défaveur.
- Un formulaire est disponible en dernière page.

Nom:
Prénom:

Question 1

On s'intéresse à une brasserie qui possède trois entrées différentes: l'entrée Est (notée E), l'entrée Sud (notée S) et l'entrée Ouest (notée O). Le gérant de la brasserie pense qu'entre 12h et 14h, pour chacune des portes, l'arrivée des clients suit un processus de Poisson homogène. Ces trois processus sont supposés indépendants, de paramètres respectifs $\lambda_E = 0.2$, $\lambda_S = 0.6$ et $\lambda_O = 0.3$ (clients par minute).

1. Montrez que le processus de comptage du nombre total de clients entrant dans la brasserie est un processus de Poisson homogène dont vous donnerez le paramètre.
2. La brasserie ouvre à 12h00. Quelle est la probabilité qu'aucun client ne soit entré par la porte Sud à 12h06?
3. Quelle est la probabilité qu'aucun client ne soit arrivé à 12h06?
4. Quelle est la probabilité que 5 clients soient arrivés à 12h06, sachant qu'exactement 2 clients sont entrés par la porte Ouest?
5. Quelle est la probabilité qu'au moins deux clients soient arrivés par chacune des portes à 12h06?
6. Quelle est la probabilité que le second client entre par la porte Est?

Nom:
Prénom:

Question 2

On considère la chaîne de Markov représentée par la matrice stochastique

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 2/3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

1. Dessinez le graphe des transitions.

2. Déterminez quels sont les états récurrents et les états transitoires de cette chaîne.

3. Déterminez quels sont les états périodiques et donnez leur période.

4. Donnez la distribution stationnaire de cette chaîne.

5. En utilisant les questions précédentes, donnez sans calculs, mais en justifiant, les temps moyens de retour pour chacun des états.

Nom:
Prénom:

Question 3

Soit W_t un processus de Wiener standard. Pour deux constantes a et b, on définit le processus S_t par
$$S_t = \exp\left(at + bW_t\right).$$

1. En vous réferrant aux propriétés de l'intégrale stochastique, montrez que S_t est une martingale par rapport à l'historique $\{W_u, u \leq s\}$ si et seulement si les coefficients a et b vérifient l'égalité
$$a + \frac{1}{2}b^2 = 0. \tag{1}$$

2. Dans le cas où les coefficients satisfont l'égalité (1), vérifiez que le processus S_t satisfait les deux points de la définition d'une martingale.

Nom:
Prénom:

Question 4

Soit X_t le prix d'une action. Aujourd'hui, en $t = 0$, l'action vaut $X_0 = 100$ CHF. On considère le modèle binomial. La variation attendue du prix de l'action est de $+5\%$ pour l'état haut et de -5% pour l'état bas. Le rendement de l'actif sans risque est de 2%. On souhaite évaluer une option dite “straddle”. Pour un prix d'exercice E, le paiement de cette option expirant à la date t est donné par:

$$(X_t - E)_+ + (E - X_t)_+ , \quad \text{où } (\cdot)_+ = \max(\cdot, 0) \ .$$

1. Dans le cas du modèle à une période, exprimez le prix de l'option pour un prix d'exercice de 105, et une date d'expiration en $t = 1$. Expliquez votre démarche en détail.

2. Expliquez la démarche à suivre pour généraliser ce résultat lorsque l'on a n périodes. Donnez en particulier la formule générale d'évaluation de ce straddle avec n périodes.

Nom:
Prénom:

Formulaire

- Une variable aléatoire X suit une loi Normale de moyenne μ et variance σ^2, dénoté par $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, si sa fonction de densité est définie par

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right).$$

- Si $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, alors pour tout $u \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{E}\left[e^{uX}\right] = \exp\left(\frac{\sigma^2 u^2}{2} + \mu u\right).$$

- Si X suit une distribution de Poisson de paramètre λ:

$$P\left[X = x\right] = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}, \; x = 0, 1, 2 \ldots$$

- Une variable aléatoire X suit une loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$ de paramètre $\lambda > 0$ si sa fonction de densité est

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0, \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{sinon.} \end{cases}$$

- Une variable aléatoire X suit une loi Gamma $\mathcal{G}(n, \beta)$ de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $\beta \in \mathbb{R}^*$ si sa fonction de densité est

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0, \\ \frac{\beta^n}{\Gamma(n)} x^{n-1} e^{-\beta x} & \text{sinon.} \end{cases}$$