Nom: Genève, le 16 juin 2007.
Prénom:

Processus aléatoires avec application en finance

- La durée de l'examen est de deux heures.
- N'oubliez pas d'indiquer votre nom et prénom sur chaque feuille.
- Toute documentation et calculatrice sont interdits.
- Veuillez justifier les réponses. Une réponse peu claire ou imprécise joue en votre défaveur.
- Un formulaire est disponible en dernière page.

Nom:
Prénom:

Question 1

Une compagnie d'assurance automobile veut évaluer le montant de la prime d'assurance qu'elle doit réclamer à ses clients. Pour tenir compte des différences de comportement au volant, la compagnie a créé trois classes de risque:

- les bons conducteurs G
- les conducteurs normaux A
- les conducteurs irresponsables B

Chaque client de la compagnie ne peut appartenir qu'à une seule classe de risque. La compagnie propose aux clients du type A ou B un contrat avec franchise alors que ceux de type G sont intégralement remboursés en cas d'accident. Les accidents des clients A, B et G sont tous indépendants entre eux.

1. On suppose que les nombres d'occurrences d'accidents pour chacune des classes suivent des processus de Poisson. On note N_G (resp. N_A et N_B) le processus associé à la classe de risque G, (resp. A et B) d'intensité λ_G (resp. λ_A et λ_B). Montrez que le processus N_F sommant les occurrences d'accidents franchisés (i.e. pour lesquels une franchise sera à déduire du montant à rembourser) suit un processus de Poisson dont vous préciserez l'intensité.

2. On donne $\lambda_A = 600$ par année, et $\lambda_B = 400$ par année. Quelle est la probabilité que le temps entre deux arrivées successives d'accidents franchisés soit inférieur à 2 jours (1 année = 365 jours)?

3. Quelle est la durée moyenne jusqu'à l'occurrence de 4 accidents dans la classe B?

4. Quelle est la probabilité que la durée jusqu'à l'occurrence de 90 accidents franchisés soit supérieure à un mois (1 mois = 30 jours)?

5. Quelles sont la variance et l'espérance du nombre annuel d'accidents franchisés? du nombre mensuel d'accidents franchisés?

6. Sachant que $\lambda_G = 200$, quelle est l'espérance du nombre mensuel d'accidents? Justifiez sans démontrer.

7. Lors d'un accident, indépendamment de son occurrence, c'est l'assureur dont le client est reconnu responsable qui doit assumer les remboursements. Un client de la classe G (resp. A, B) est reconnu responsable avec une probabilité $p_G = 0.2$ (resp. $p_A = 0.5$, $p_B = 0.8$) et non responsable avec une probabilité $1 - p_G$ (resp. $1 - p_A$, $1 - p_B$). Quel est le nombre moyen annuel d'accidents franchisés pour lesquels la compagnie doit réellement effectuer un remboursement? Même question pour le nombre moyen annuel d'accidents non franchisés?

8. Le remboursement moyen restant à la charge de la compagnie pour un accident franchisé est de 4'000 francs, et celui pour un accident non franchisé, de 6'000 francs. Déduisez de la question précédente l'espérance annuelle des remboursements que devra assumer la compagnie pour l'ensemble des accidents.

Nom:
Prénom:

Question 2

Soit W_{1t}, W_{2t} et W_{3t} des mouvements browniens indépendants de valeur initiale nulle. Leur distribution est telle que pour tout i et pour tout t, $W_{it} \sim \mathcal{N}(0, t/3)$. Soit $S_t = W_{1t} + W_{2t} + W_{3t}$.

1. Le processus $Z_t = S_t^2 - t$ est-il une martingale?

2. S_t définit-il un mouvement brownien?

Nom:
Prénom:

Question 3

Après avoir observé le comportement des jeunes conducteurs ces 20 dernières années, une compagnie d'assurance décide d'appliquer une politique d'exclusion pour inciter à la prudence. La compagnie a déjà mis en place un système classique de malus, et souhaite appliquer la politique d'exclusion avant même l'entrée dans ce système classique. Le processus d'assurance mis en place est modélisé par une chaîne de Markov homogène à 5 états dont les caractéristiques sont données ci-dessous:

- Tous les jeunes conducteurs débutent leur historique d'assuré dans le même état.
- En cas d'accident responsable avant la fin d'une période probatoire de 3 ans, le jeune conducteur reçoit un avertissement et la période probatoire recommence au début.
- Si le conducteur averti commet un deuxième accident responsable avant la fin de la période probatoire, il est définitivement exclu par la compagnie.
- Si le conducteur arrive à la fin de la période probatoire sans avoir commis d'accident (ou de nouvel accident) responsable, il rentre dans le système classique dans l'état de mauvais conducteur.
- Le système classique ne comprend que deux états, celui de mauvais conducteur et celui de conducteur normal. Un conducteur normal passe dans l'état de mauvais conducteur s'il commet un accident responsable. Un mauvais conducteur passe dans l'état normal s'il ne commet pas d'accident responsable pendant 2 ans.

1. Proposez une modélisation à 5 états: pour cela, dessinez le graphe de transition de cette chaîne de Markov en nommant les états et en expliquant les transitions.
2. Combien de temps faut-il au minimum à un jeune conducteur pour être considéré comme un conducteur normal?
3. La modélisation retenue par la compagnie d'assurance est donnée par la matrice P ci-dessous. Identifiez les états 1 à 5 avec ceux cités dans la description de la chaîne.

$$P = \begin{bmatrix} 9/10 & 1/20 & 0 & 1/20 & 0 \\ 0 & 1/5 & 4/5 & 0 & 0 \\ 0 & 1/10 & 9/10 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5 & 0 & 7/10 & 1/10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

4. Quels sont les états récurrents et les états transitoires?
5. Que pouvez-vous dire du sous-système constitué par les états 2 et 3?
6. Indiquez, si elle existe, la distribution stationnaire de ce sous-système?
7. Quel est le temps moyen de retour en l'état 3?
8. La compagnie s'aperçoit que le système conducteur normal/mauvais conducteur est trop restrictif. Que pouvez-vous proposer pour que ce système soit plus progressif? (Vous dessinerez un graphe).

Nom:
Prénom:

Question 4

On considère un marché financier représenté par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}_t, P)$ muni d'une filtration $\mathcal{F}_t$ représentant l'évolution de l'information disponible sur le marché. On considère également un mouvement brownien standard W_t adapté à la filtration $\mathcal{F}_t$.

La valeur de l'actif sans risque M_t suit la dynamique:

$$dM_t = rM_t dt.$$

Le prix S_t d'une action est définit par l'équation différentielle stochastique:

$$\frac{dS_t}{S_t} = \alpha_t dt + \sigma_t dW_t \ ,$$

avec α_t et σ_t déterministes. On définit le processus Z_t comme la valeur actualisée du prix de l'action, $Z_t = \frac{S_t}{M_t}$.

1. Donnez la solution de l'équation différentielle ordinaire vérifiée par M_t avec pour condition initiale $M_0 = 1$.
2. Donnez l'équation différentielle stochastique vérifiée par le processus Z_t.
3. Quelle condition faut-il imposer au paramètre α_t pour que le processus Z_t soit une martingale?
4. Si Z_t est une martingale (condition de la question précédente vérifiée), le processus Z_t^2 est-il aussi une martingale?
5. Dans le cas général, y-a-t-il une condition à imposer aux paramètres α_t et σ_t pour que le processus Z_t^2 soit une martingale?

Nom:
Prénom:

Formulaire

- Une variable aléatoire X suit une loi Normale de moyenne μ et variance σ^2, dénoté par $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, si sa fonction de densité est définie par

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right).$$

- Si $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, alors pour tout $u \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{E}\left[e^{uX}\right] = \exp\left(\frac{\sigma^2 u^2}{2} + \mu u\right).$$

- Si X suit une distribution de Poisson de paramètre λ:

$$P\left[X = x\right] = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!},\ x = 0, 1, 2 \ldots$$

- Une variable aléatoire X suit une loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$ de paramètre $\lambda > 0$ si sa fonction de densité est

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0, \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{sinon.} \end{cases}$$

- Une variable aléatoire X suit une loi Gamma $\mathcal{G}(n, \beta)$ de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $\beta \in \mathbb{R}^*$ si sa fonction de densité est

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0, \\ \frac{\beta^n}{\Gamma(n)} x^{n-1} e^{-\beta x} & \text{sinon.} \end{cases}$$