Nom: Genève, le 24 juin 2006.
Prénom:

Processus aléatoires avec application en finance

La durée de l'examen est de trois heures.

Tous les documents et calculatrices sont interdits.

Veuillez justifier les réponses de manière détaillée. Une réponse peu claire joue en votre défaveur.

N'oubliez pas d'indiquer vos nom et prénom sur toutes les feuilles.

Un formulaire est disponible en dernière page.

Nom:
Prénom:

Question 1

Le nombre d'appels à un standard téléphonique suit un processus de Poisson d'intensité de 4 appels par heure.

1. Quelle est la probabilité qu'il y ait strictement moins de deux appels la première heure?
2. Supposons qu'il y ait 6 appels la première heure. Quelle est alors la probabilité qu'il y en ait strictement moins de deux la deuxième heure?
3. L'opérateur fait une pause après avoir répondu à dix appels. Quelle est la durée moyenne séparant deux pauses?
4. Trois quarts des appels sont dus à des hommes, un quart à des femmes, ceci indépendamment de l'heure de l'appel. Calculez la probabilité qu'en une heure il y ait exactement deux hommes et trois femmes à appeler le standard.

Question 2

On considère la chaîne de Markov représentée par la matrice stochastique

$$P = \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1/4 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Les états sont numérotés de 1 à 4.

1. Dessinez le graphe des transitions.
2. Donnez s'il y en a, tous les sous-ensembles fermés et irréductibles.
3. Déterminez quels sont les états récurrents et les états transitoires de cette chaîne.
4. On suppose qu'initialement la chaîne se trouve dans l'état 3. Quelle est la probabilité d'être absorbé en l'état 4?
5. On étudie séparément le sous-système formé par les états 1 et 2: $P^* = \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$. Quelle est la distribution invariante associée à ce sous-système?

Nom:
Prénom:

Question 3

Soit W_t un processus de Wiener standard.

1. Soit le processus aléatoire défini par
$$Z_t = e^{\gamma X_t + \delta},$$
où $dX_t = adt + \sigma dW_t,\ X_0 = 1$. Quelle est l'équation différentielle stochastique suivie par le processus Z_t?

2. Pour quelle valeur du paramètre γ le processus Z_t est-il une martingale?

3. X_t étant donné au point 1, soit le processus aléatoire défini par
$$Y_t = e^{-tX_t}$$
Quelle est l'équation différentielle stochastique suivie par le processus Y_t?

Question 4

Soit W_t un processus de Wiener standard, et $f(t)$ et $g(t)$ des fonctions déterministes du temps. Vérifiez si les processus suivant peuvent être des martingales.

1. $X_t = W_t - \frac{1}{2}t$
2. $Y_t = W_t^2 - f(t)$
3. $Z_t = W_t^3 - g(t)$
4. e^{X_t}, avec X_t donné en 1.
5. $\left(e^{Y_t}\right)^2$, avec Y_t donné en 2.

Question 5 (Dérivation du modèle binomial)

Considérez le modèle binomial à une période. Le prix de l'action est S_0 en $t = 0$ et S_1 en $t = 1$. S_1 peut prendre la valeur uS avec une probabilité p ou la valeur dS avec une probabilité $1 - p$, pour des coefficients multiplicateurs $u > d$. Le taux d'intérêt sans risque correspondant à une période est r_f. Le payoff en $t = 1$ d'un **PUT** européen sur l'action est $\max(K - S_1, 0)$, où K est le prix d'exercice de l'option.

1. Quelle contraintes doivent satisfaire u et d par rapport à r_f pour éviter une situation d'arbitrage.

2. Quel est le prix du PUT si $K < dS_0$ ou si $K > uS_0$? Concluez-en que, afin que le problème ait un sens, il faut avoir $dS_0 < K < uS_0$.

3. De façon à déterminer le prix du PUT on construit un portefeuille constitué d'une quantité α_1 de l'action et d'une quantité α_2 de l'actif sans risque, qui va dupliquer le payoff de l'option. Trouvez α_1 et α_2.

4. En utilisant un raisonnement d'absence d'opportunité d'arbitrage, donnez le prix P du PUT en $t = 0$.

5. Montrez que P peut être exprimé comme la valeur actualisée de l'espérance du payoff du PUT par rapport à une nouvelle probabilité π.

6. Expliquez pourquoi l'on parle de probabilité neutre au risque.

Nom:
Prénom:

Question 6

Soit $Z_1, Z_2, Z_3, \ldots$ des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées telles que

$$Z_n = \begin{cases} a_n & \text{avec probabilité } \frac{1}{2n^2}, \\ 0 & \text{avec probabilité } 1 - \frac{1}{n^2}, \\ -a_n & \text{avec probabilité } \frac{1}{2n^2}. \end{cases}$$

1. Soit $Y_n = \sum_{i=1}^{n} Z_i$. Montrez que le processus Y_n est une chaîne de Markov.
2. Le processus Y_n est-il une martingale?
3. Soit $X_n = \sum_{i=1}^{n} Z_i^2 - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2}$. Que doivent vérifier les a_n pour que le processus X_n soit une martingale?

Nom:
Prénom:

Formulaire

- Une variable aléatoire X suit une loi Normale de moyenne μ et variance σ^2, dénoté par $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, si sa fonction de densité est définie par

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right).$$

- Si $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, alors pour tout $u \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{E}\left[e^{uX}\right] = \exp\left(\frac{\sigma^2 u^2}{2} + \mu u\right).$$

- Si X suit une distribution de Poisson de paramètre λ:

$$P[X = x] = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}, \; x = 0, 1, 2 \ldots$$

- Une variable aléatoire X suit une loi Gamma $\mathcal{G}(n, \beta)$ de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $\beta \in \mathbb{R}^*$ si sa fonction de densité est

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0, \\ \frac{\beta^n}{\Gamma(n)} x^{n-1} e^{-\beta x} & \text{sinon.} \end{cases}$$